ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 517.977.58

К ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ УПРАВЛЕНИЙ ПРИ НЕВЫПУКЛЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ[1]

Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников

Рассматривается задача реконструкции управлений для динамических детерминированных аффинно-управляемых систем. Эта задача состоит в построении по дискретным неточным замерам наблюдаемой траектории кусочно-постоянных аппроксимаций неизвестного управления, порождающего эту траекторию. Предполагается, что управления стеснены известными невыпуклыми геометрическими ограничениями. В таком случае могут возникать скользящие режимы управлений. Для описания воздействия скользящих режимов на динамику системы используется теория обобщенных управлений. Введено понятие нормального управления — управления, порождающего наблюдаемую траекторию и определяемого единственным образом. Целью задачи реконструкции является построение кусочно-постоянных аппроксимаций нормального управления, удовлетворяющих заданным невыпуклым геометрическим ограничениям. Сходимость аппроксимаций понимается в смысле слабой сходимости в пространстве L^2. Предложено решение задачи реконструкции управлений.

Ключевые слова: обратные задачи, реконструкция управлений, скользящие управления, невыпуклые ограничения, слабая сходимость, обобщенные управления.

N. N. Subbotina, E. A. Krupennikov. On a control reconstruction problem with nonconvex constraints.

A control reconstruction problem for dynamic deterministic affine-controlled systems is considered. This problem consists of constructing piecewise constant approximations of an unknown control generating an observed trajectory from discrete inaccurate measurements of this trajectory. It is assumed that the controls are constrained by known nonconvex geometric constraints. In this case, sliding modes may appear. To describe the impact of sliding modes on the dynamics of the system, the theory of generalized controls is used. The notion of normal control is introduced. It is a control that generates an observed trajectory and is defined in a unique way. The aim of reconstruction is to construct piecewise constant approximations of the normal control that satisfy given nonconvex geometric constraints. The convergence of approximations is understood in the sense of weak convergence in the L_2 space. A solution to the control reconstruction problem is proposed.

Keywords: inverse problems, control reconstruction, sliding modes, nonconvex constraints, weak convergence, generalized controls.

MSC: 34H05, 49N45

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-188-202

1. Введение

Статья посвящена обратным задачам для управляемых динамических систем. А именно, рассматривается задача реконструкции управлений (далее — ЗРУ). Эта задача состоит в построении по дискретным неточным замерам наблюдаемой траектории кусочно-постоянных аппроксимаций неизвестного управления, порождающего эту траекторию. Рассматриваются динамические детерминированные аффинно-управляемые системы.

Существует ряд современных методов решения ЗРУ. Большой вклад в их развитие был внесен Аркадием Викторовичем Кряжимским. Близкими к тематике данной статьи, к примеру, являются монографии [1;2]. Отдельно отметим методы, базирующиеся на подходе к решению ЗРУ, предложенном А. В. Кряжимским и Ю. С. Осиповым [3]. Этот подход опирается на

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

процедуру экстремального прицеливания, истоки которой лежат в работах школы Н. Н. Красовского [4]. На основании этого подхода разработан ряд численных методов (см. обзорную статью [5]).

В данной статье рассматриваются ЗРУ с невыпуклыми геометрическими ограничениями на управления. При невыпуклых ограничениях могут возникать скользящие режимы управлений [6]. Для такого случая, ранее не рассматривавшегося для задач реконструкции управлений, в качестве решения ЗРУ выделено нормальное управление, определяемое единственным образом. Заметим, что методы, описанные в работе [5], позволяют строить аппроксимации решения (измеримого управления, порождающего наблюдаемую траекторию и имеющего минимальную L^2-норму), сходящиеся к нему по норме пространства L^2. Однако, нельзя гарантировать возможность аппроксимации этого решения в смысле сильной топологии пространства L^2 измеримыми управлениями, удовлетворяющими заданным невыпуклым ограничениям.

Другая сложность ЗРУ заключается в том, что наблюдаемая траектория может порождаться не единственным управлением, тем более в случае допущения скользящих управлений. Предлагается понятие нормального управления, порождающего наблюдаемую траекторию и определяемого единственным образом. В корректной постановке ЗРУ целью является реконструкция именно этого нормального управления.

Показано, что нормальное управление всегда можно аппроксимировать в смысле слабой топологии пространства L^2 кусочно-постоянными аппроксимирующими управлениями, удовлетворяющими заданным невыпуклым ограничениям.

Предложено решение поставленной ЗРУ с невыпуклыми ограничениями на управления. Доказана слабая сходимость аппроксимаций, получаемых с помощью этого подхода. Получена оценка невязки траекторий, порождаемых аппроксимирующими управлениями, и наблюдаемой траектории.

2. Входные данные ЗРУ

2.1. Динамика

Рассматриваются динамические аффинно-управляемые детерминированные системы вида

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt} = G(t,x(t))u(t) + f(t,x(t)),\\ x(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^n, \quad u(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^m, \quad t\in[0,T], \quad T<\infty.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Заданы геометрические ограничения на значения управлений

$$u(t)\in\mathbf{U}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{U}\subset\mathbb{R}^m$ — невыпуклый компакт.

2.2. Замеры

Наблюдается траектория $x^*(\cdot)\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$ системы (2.1), порождаемая неизвестным управлением. Информация о траектории имеет вид набора неточных дискретных замеров. Абсолютная погрешность замеров $\delta>0$. Замеры поступают с шагом $h>0$. Предполагается, что $h{=}h(\delta)$.

Точки замеров обозначаются через y_i^δ:

$$\|y_i^\delta - x^*(t_i)\|\le\delta, \quad t_i = ih, \quad T=Nh, \quad i=0,\dots,N. \tag{2.3}$$

2.3. Предположения

Вводятся следующие предположения:

1. Существуют константы $d_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, $h_0 > 0$ и компакт $\Psi \subset \mathbb{R}^n$ такие, что при любых параметрах замеров $\delta \in (0, \delta_0]$, $h \in (0, h_0]$ выполняется следующее условие:

$$\bigcup_{i=0,\dots,N} B_{d_0}[y_i^\delta] \subset \Psi, \tag{2.4}$$

где $B_{d_0}[y_i^\delta]$ — замкнутый шар радиуса d_0 с центром в точке замеров y_i^δ (2.3).

2. Матрица $G(t,x)$ и вектор $f(t,x)$ в динамике (2.1) непрерывны по времени и локально липшицевы по фазовой переменной при $(t,x) \in D_0 \triangleq [0,T] \times \Psi$ с константой Липшица $L = L(D_0) > 0$:

$$\begin{gathered} \|f(t,x_2) - f(t,x_1)\| \le L\|x_2 - x_1\|, \\ \|G(t,x_2) - G(t,x_1)\|_2 \le L\|x_2 - x_1\| \quad \forall (t,x_1,x_2) \in D_0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Обозначение $\|\cdot\|_2$ — спектральная матричная норма, определяемая как $\|G\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{\|x\|=1} \|Gx\|$.

3. Постановка ЗРУ

Общая постановка ЗРУ заключается в следующем: на основании наборов неточных замеров (2.3) построить аппроксимации управления, порождающего наблюдаемую траекторию. Для того, чтобы поставить корректную ЗРУ, необходимо сформулировать понятие нормального управления — управления, порождающего базовую траекторию и определяемого единственным образом, которое будет являться решением ЗРУ. Помимо этого, необходимо выбрать и обосновать тип сходимости аппроксимаций нормального управления.

3.1. Нормальное управление

Обобщенные управления. В случае невыпуклых геометрических ограничений на управления (2.2) могут возникать скользящие режимы управлений [6]. Воздействие скользящих управлений на динамику системы (2.1) описывается с помощью теории обобщенных управлений [7; 8].

Обобщенные управления — измеримые по времени функции $t \longrightarrow \mu_t(du) : [0,T] \to rpm(\mathbf{U})$ со значениями во множестве регулярных вероятностных борелевских мер на $\mathbf{U}$ с топологией, индуцированной слабой со звездой топологией $C^*(\mathbf{U})$ — пространства, сопряженного пространству непрерывных функций.

Рассматривается обобщенная динамика, порождаемая обобщенными управлениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{\mathbf{U}} G(t,x(t))u\,\mu_t(du) + f(t,x(t)). \tag{3.1}$$

Усредненные управления. Каждому обобщенному управлению $\mu_t(du)\colon [0,T] \to rpm(\mathbf{U})$ ставится в соответствие *усредненное управление* $v(\cdot)\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$

$$t \longrightarrow v(t) = \int_{\mathbf{U}} u\,\mu_t(du).$$

Усредненные управления обладают следующими свойствами.

1. Усредненные управления являются измеримыми функциями [8, IV.1.6].

2. Значения усредненных управлений принадлежат выпуклой оболочке множества $\mathbf{U}$:

$$v(t) \in \mathrm{co}\mathbf{U} \quad \text{п.в. на } [0,T].$$

3. Усредненное управление может отвечать не единственному обобщенному. В соответствие каждому усредненному управлению $v(\cdot)$ ставится множество M_v обобщенных:

$$M_v \triangleq \left\{\mu_t(du)\colon \int\limits_{\mathbf{U}} u\,\mu_t(du) = v(t) \text{ при п.в. } t \in [0,T]\right\}.$$

4. Усредненное управление $v(\cdot)$ эквивалентно по воздействию каждому обобщенному из множества M_v в том смысле, что они порождают одну и ту же траекторию при одинаковых начальных условиях.

Действительно, в силу линейности по управлениям системы (2.1) имеем

$$\int\limits_U G(t,x(t))u\,\mu_t(du) = G(t,x(t)) \int\limits_U u\,\mu_t(du) = G(t,x(t))v(t).$$

5. Множества обобщенных и усредненных управлений, порождающих одну и ту же траекторию $x^*(\cdot)$ системы (3.1), являются выпуклыми. Это свойство является следствием линейности системы (3.1) по управлениям.

Овыпукление динамики. В силу эквивалентности по воздействию множество обобщенных управлений M_v отождествляется с усредненным $v(\cdot)$, эквивалентным им. Тогда воздействие скользящих управлений можно описывать не обобщенной динамикой (3.1), а исходной динамикой (2.1) с овыпукленными ограничениями на управления. Вместо ограничений (2.2) принимаются ограничения

$$u(t) \in \mathrm{co}\,\mathbf{U} \text{ п.в. на } [0,T]. \tag{3.2}$$

З а м е ч а н и е 1. Допускается, что наблюдаемая траектория может порождаться скользящим управлением. Эту траекторию можно трактовать как траекторию системы (2.1), порожденную усредненным управлением, удовлетворяющим выпуклым ограничениям (3.2).

Нормальное управление. Следуя [2;9], определим *нормальное управление* как измеримое управление $u^*(\cdot)$, порождающее траекторию $x^*(\cdot)$ системы (2.1), удовлетворяющее выпуклым ограничениям (3.2) и имеющее минимальную норму в пространстве L^2.

Из свойства 5 и строгой выпуклости L^2 нормы следует, что нормальное управление единственно.

3.2. Сходимость аппроксимаций нормального управления

Покажем, что нельзя требовать сильной сходимости в пространстве L^2 аппроксимаций нормального управления, удовлетворяющих невыпуклым геометрическим ограничениям (2.2). Для примера рассмотрим обобщенную динамику

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{\mathbf{U}} u\,\mu_t(du), \quad x,u \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{U} = \{1;-1\} \text{ — двухточечное множество.} \tag{3.3}$$

Пусть наблюдаемая траектория $x^*(t) \equiv 0$ порождена обобщенным управлением (скользящим режимом)

$$\mu_t(du)\colon \mu_t(1) = \mu_t(-1) = 0.5 \quad \forall t \in [0,T].$$

В таком случае нормальное управление $u^*(t) \equiv 0$. Но для любой кусочно-постоянной функции $u_\delta(\cdot)$, удовлетворяющей заданным в (3.4) невыпуклым ограничениям, справедливо соотношение

$$\|u_\delta(t) - u^*(t)\|_{L^2} = \int\limits_0^T (u_\delta(t) - u^*(t))^2 dt = T \nrightarrow 0.$$

Таким образом, в примере невозможно аппроксимировать нормальное управление в смысле сильной топологии пространства L^2 кусочно-постоянными функциями, удовлетворяющими заданным невыпуклым ограничениям.

3.3. Сходимость аппроксимаций нормального управления

Покажем, что нельзя требовать сильную сходимость в пространстве L^2 аппроксимаций нормального управления, удовлетворяющих невыпуклым геометрическим ограничениям (2.2). Для примера рассмотрим обобщенную динамику

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{\mathbf{U}} u\,\mu_t(du), \quad x, u \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{U} = \{1; -1\} \text{ — двухточечное множество.} \tag{3.4}$$

Пусть наблюдаемая траектория $x^*(t) \equiv 0$ порождена обобщенным управлением (скользящим режимом)

$$\mu_t(du)\colon \mu_t(1) = \mu_t(-1) = 0.5 \ \ \forall t \in [0, T].$$

Нормальное управление в таком случае $u^*(t) \equiv 0$. Но для любой кусочно-постоянной функции $u_\delta(\cdot)$, удовлетворяющей заданным в (3.4) невыпуклым ограничениям,

$$\|u_\delta(t) - u^*(t)\|_{L^2} = \sqrt{\int\limits_0^T (u_\delta(t) - u^*(t))^2 dt} = \sqrt{T} \nrightarrow 0.$$

Таким образом, пример показывает, что не всегда возможно аппроксимировать нормальное управление в смысле сильной топологии пространства L^2 кусочно-постоянными функциями, удовлетворяющими заданным невыпуклым ограничениям.

Сходимость аппроксимаций нормального управления понимается в смысле слабой топологии пространства $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Последовательность функций $u_i(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ сходится к функции $v(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ слабо в L^2, если

$$\int\limits_0^T \langle \varphi(t), u_i(t) - v(t)\rangle dt \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ \forall \varphi(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m), \tag{3.5}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Далее используются следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \mathcal{U} \triangleq \{u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)\colon u(t) \in \mathbf{U} \text{ п.в. на } [0, T]\}, \\ \operatorname{co}\mathcal{U} \triangleq \{u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)\colon u(t) \in \operatorname{co}\mathbf{U} \text{ п.в. на } [0, T]\}, \\ R_U \triangleq \max_{u \in \operatorname{co}\mathbf{U}} \|u\|, \quad R_G \triangleq \max_{(t,x)\in D_0} \|G(t, x)\|_2, \quad R_f \triangleq \max_{(t,x)\in D_0} \|f(t, x)\|. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. *Для функций из множества* $\operatorname{co}\mathcal{U}$ *слабая сходимость в* L^2 (3.5) *эквивалентна сходимости*

$$\int\limits_0^T \langle \xi(t), u_i(t) - v(t)\rangle dt \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ \forall \xi(\cdot) \in C([0, T], \mathbb{R}^m). \tag{3.7}$$

Доказательство. Действительно, все функции из $\operatorname{co}\mathcal{U}$ ограничены в совокупности константой R_U, а множество непрерывных функций $C([0, T], \mathbb{R}^m)$ всюду плотно в $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ [8, I.5.18]. Тогда справедливость утверждения следует из теоремы 2 [14, IV.3.2]. □

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Выпуклая оболочка множества* $\mathcal{U}$ (3.6) (*множество* $\operatorname{co}\mathcal{U}$) *совпадает с его замыканием в слабой топологии пространства* L^2.

Доказательство. Во-первых, множество $\operatorname{co}\mathcal{U}$ (3.6) замкнуто в слабой топологии пространства $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$. Это следует из леммы 1А [15, с. 169], согласно которой множество $\operatorname{co}\mathcal{U}$ всех измеримых функций со значениями из компактного выпуклого множества $\operatorname{co}\mathbf{U}$ является слабо компактным.

Во-вторых, для любого элемента из $\operatorname{co}\mathcal{U}$ найдется последовательность элементов из $\mathcal{U}$, сходящаяся к нему слабо в L^2. Это следует из теоремы 12.6.7 [16, с. 650].

Действительно, рассмотрим банахово сепарабельное самосопряженное [14, IV.2.3.1, с. 210] пространство $\mathbb{R}^m$. Подмножество $\operatorname{co}\mathbf{U} \subset (\mathbb{R}^m)^* = \mathbb{R}^m$ выпукло, ограничено и слабо замкнуто (так как для конечномерного евклидова пространства сильная и слабая сходимости эквивалентны [14, IV.2.3.1, с. 210]). По построению $\operatorname{co}\mathbf{U}$ — выпуклая оболочка множества $\mathbf{U}$. Следовательно, множество $\mathbf{U}$ полно во множестве $\operatorname{co}\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}$ is total in $\operatorname{co}\mathbf{U}$ [16, с. 650]). Обозначим через $PC(0,T;\mathbf{U}) \subset \mathcal{U}$ множество кусочно-постоянных функций на $[0,T]$ со значениями из $\mathbf{U}$. Обозначим через $R(0,T;\operatorname{co}\mathbf{U})$ множество измеримых функций со значениями из $\operatorname{co}\mathbf{U}$, т. е. $R(0,T;\operatorname{co}\mathbf{U}) = \operatorname{co}\mathcal{U}$. Тогда по теореме 12.6.7 [16, с. 650] множество $PC(0,T;\mathbf{U})$ слабо в $L^1([0,T],\mathbb{R}^m)$, секвенциально плотно во множестве $R(0,T;\operatorname{co}\mathbf{U})$.

По определению $L^1([0,T],\mathbb{R}^m)$-слабой сходимости ([16, с. 625], Theorem 12.2.11).

$$\forall u(\cdot) \in \operatorname{co}\mathcal{U} \quad \exists\{u_k(\cdot) \in PC(0,T;\mathbf{U}) \subset \mathcal{U},\ k = 1,2,\ldots\} :$$
$$\int_0^T \langle u(t) - u_k(t), \eta(t)\rangle dt \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \eta(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m).$$

В частности, так как $C([0,T],\mathbb{R}^m) \subset L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$,

$$\int_0^T \langle u(t) - u_k(t), \xi(t)\rangle dt \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \xi(\cdot) \in C([0,T],\mathbb{R}^m).$$

Но тогда из утверждения 1 следует, что последовательность $\{u_k(\cdot)\} \subset \mathcal{U}$ сходится к $u(\cdot) \in \operatorname{co}\mathcal{U}$ слабо в L^2. □

Замечание 2. Из теоремы 1, в частности, следует, что любую функцию из $\operatorname{co}\mathcal{U}$ (в том числе, нормальное управление) можно аппроксимировать в смысле слабой топологии пространства L^2 кусочно-постоянными функциями из $\mathcal{U}$, т. е. измеримыми управлениями, удовлетворяющими невыпуклым ограничениям (3.2).

3.4. Корректная постановка ЗРУ

Задача реконструкции управлений заключается в следующем.

Построить по замерам (2.3) наблюдаемой траектории $x^*(\cdot)$, полученным для параметров $\delta \in (0,\delta_0]$ и $h \in (0,h_0]$, аппроксимирующие кусочно-постоянные управления $u_\delta(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ такие, что

1.
$$u_\delta(t) \in \mathbf{U}, \quad t \in [0,T]. \tag{3.8}$$

2. Траектории $x_\delta(\cdot)$, порожденные этими управлениями, равномерно сходятся к наблюдаемой:
$$\|x_\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_C \overset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.9}$$

3. Эти управления слабо в L^2 сходятся к нормальному управлению $u^*(\cdot)$:

$$\int_0^T \langle \varphi(t), u_\delta(t) - u^*(t) \rangle dt \xrightarrow{\delta \to 0} 0 \quad \forall \varphi(\cdot) \in L^2([0,T], \mathbb{R}^m). \tag{3.10}$$

4. Решение ЗРУ

Предлагаемый подход к решению ЗРУ (3.8)–(3.10) с невыпуклыми геометрическими ограничениями на управления (2.2) предполагает, что известно решение ЗРУ (3.8)–(3.10) для случая выпуклых ограничений вида (3.2). Иначе говоря, известен способ построения вспомогательных кусочно-постоянных аппроксимирующих управлений $\hat{u}_\delta(\cdot) = \hat{u}_\delta(\cdot\,;\delta)\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$ нормального управления $u^*(\cdot)$, удовлетворяющих выпуклым геометрическим ограничениям (3.2) и условиям ЗРУ (3.9), (3.10).

Будем считать, что эти аппроксимации постоянны на отрезках времени $[t_i, t_{i+1}]=[ih, (i+1)h]$ и имеют вид

$$\hat{u}_\delta(t) = \hat{u}_{\delta,i} \in \operatorname{co} \mathbf{U}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4.1}$$

З а м е ч а н и е 3. Известно несколько методов построения вспомогательных аппроксимаций с требуемыми свойствами. В частности, отметим ряд методов (см. обзорную статью [5]), базирующихся на подходе, предложенном А. В. Кряжимским и Ю. С. Осиповым [3].

Нами в работах [10–12] был развит и обоснован другой подход к построению вспомогательных аппроксимаций $\hat{u}_\delta(\cdot)$, удовлетворяющих выпуклым ограничениям (3.2). Он опирается на использование конструкций из вспомогательных задач вариационного исчисления на нахождение стационарных точек целевых интегральных функционалов. Особенность подхода заключается в использовании во вспомогательных задачах функционалов, интегранты которых являются d. c.-функциями [17], представляющими собой разность двух выпуклых функций (*difference convex*). Функционалы имеют вид

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T \Big[- \frac{\|x(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \alpha^2 \frac{\|u(t) - u^*(t)\|^2}{2} \Big] dt. \tag{4.2}$$

Здесь $\alpha > 0$ — малый регуляризирующий [9] параметр, а функция $y^\delta(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ — гладкая интерполяция дискретных замеров (2.3). Подробный алгоритм построения вспомогательных аппроксимаций этим методом описан и обоснован в работах [10–12]. Для реализации этого алгоритма требуется выполнение следующих дополнительных предположений (в дополнение к предположениям 1, 2 из подразд. 2.3):

3. Размерность управлений m больше либо равна размерности фазовых переменных n.

4. Функции $G(\cdot)$ и $f(\cdot)$ локально липшицевы на D_0 по совокупности переменных с константой Липшица L.

5. Ранг матрицы $G(t,x)$ равен n при всех $(t,x) \in D_0$.

Заметим, что в работе [11] показана поточечная сходимость аппроксимаций нормального управления. Однако, для ограниченных функций из нее следует и слабая теорема 13.44 из [13].

На основании выкладок, опубликованных в работе [11], получим оценку невязки траекторий $\hat{x}_\delta(\cdot)\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$, порождаемых вспомогательными аппроксимирующими управлениями $\hat{u}_\delta(\cdot)$, и наблюдаемой траектории $x^*(\cdot)$. В оценке присутствует параметр $\alpha > 0$ — дополнительный малый параметр этого метода аппроксимации из вспомогательных функционалов (4.2).

Лемма 1. *Пусть выполняются предположения* 1–5. *Пусть* $\hat{x}_\delta(\cdot)$ — *траектории системы* (2.1), *порождаемые вспомогательными аппроксимациями* $\hat{u}_\delta(\cdot)$, *которые построены по методу, описанному в* [11]. *И пусть параметры* $\delta \le \delta_0,\ h = h(\delta) \le h_0,\ \alpha = \alpha(\delta) > 0$ *стремятся к нулю в согласовании*

$$\alpha \xrightarrow{\delta\to 0} 0, \quad \frac{\delta}{h} \xrightarrow{\delta\to 0} 0, \quad 0 < \frac{\alpha}{h^2} \le K_0 \le \infty. \tag{4.3}$$

Тогда

$$\|\hat{x}_\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_C \xrightarrow{\delta\to 0} 0. \tag{4.4}$$

Если выбрать параметры h *и* α *следующим образом*:

$$h = \sqrt{\delta}, \quad \alpha = \delta, \tag{4.5}$$

то найдутся такие константы K_1, K_2, *зависящие от свойств функций* $G(t,x)$ *и* $f(t,x)$ *из динамики* (2.1), *что*

$$\|\hat{x}_\delta(t) - x^*(t)\| \le K_2 e^{K_1 T}\sqrt{\delta} + o(\sqrt{\delta}), \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. Обратимся к доказательству теоремы 2 из [11, с. 234–239]. В последней формуле этого доказательства [11, с. 239] дана оценка невязки

$$\begin{aligned}\|\hat{x}^\delta(t) - x^*(t)\| \le \Big(\delta + 2hR_G R_U + 2TLR_U(\delta + h(K+1))\Big)e^{L(R_U+1)T}\\ + 2\frac{R_G\, r_{\hat{u}}(\delta,h,\alpha)}{L(R_U+1)}\big(e^{L(R_U+1)T} - 1\big), \quad t \in [0,T],\end{aligned} \tag{4.6}$$

где $K \triangleq \max\limits_{u\in\mathbf{U},\ (t,x)\in D_0} \|G(t,x)u + f(t,x)\|$, а функция $r_{\hat{u}}(\cdot)$ определена в формуле (21) из [11]. Введем вспомогательные константы

$$C_1 \triangleq L(R_U+1), \quad C_2 \triangleq 1 + 2TLR_U, \quad C_3 \triangleq 2R_G R_U + 2TLR_U(K+1), \quad C_4 \triangleq \frac{2R_G}{L(R_U+1)}.$$

Перепишем оценку (4.6) в этих константах:

$$\|\hat{x}^\delta(t) - x^*(t)\| \le e^{C_1 T}\big(C_2\delta + C_3 h + C_4 r_{\hat{u}}(\delta,h,\alpha)\big). \tag{4.7}$$

Согласно формуле (21) из работы [11]

$$r_{\hat{u}}(\delta,h,\alpha) \triangleq r_k(\delta,h) + R_{G^\top Q^{-1}}\frac{r_x(\delta,h,\alpha) + 2\delta}{h}, \tag{4.8}$$

где

$$R_{G^\top Q^{-1}} \triangleq \max_{(t,x)\in D_0} \big\|G^\top(t,x)\big[G(t,x)G^\top(t,x)\big]^{-1}\big\|_2,$$

а функции $r_k(\cdot)$ и $r_x(\cdot)$ определены в формулах (12), (18) из [11]. Заметим, что матрица $\big[G(t,x)G^\top(t,x)\big]^{-1}$ существует по предположению 5.

Перепишем выражение (4.8) как

$$r_{\hat{u}}(\delta,h,\alpha) = r_k(\delta,h) + C_5\frac{r_x(\delta,h,\alpha)}{h} + C_6\frac{\delta}{h}, \quad C_5 \triangleq R_{G^\top Q^{-1}}, \quad C_6 \triangleq 2R_{G^\top Q^{-1}}. \tag{4.9}$$

С учетом соотношения (16) из [11] имеем

$$\begin{gathered}|r_k(\delta,h)| \le (\delta + h(K+1))\left(L_{G^\top Q^{-1}}(K + R_f) + R_{G^\top Q^{-1}}L\right) = C_7\delta + C_8 h,\\ C_7 \triangleq \left(L_{G^\top Q^{-1}}(K+R_f) + R_{G^\top Q^{-1}}L\right), \quad C_8 \triangleq (K+1)\left(L_{G^\top Q^{-1}}(K+R_f) + R_{G^\top Q^{-1}}L\right),\end{gathered} \tag{4.10}$$

где $L_{G^\top Q^{-1}}$ — константа Липшица матричной функции $G(\cdot)\left[G(\cdot)G^\top(\cdot)\right]^{-1}$. Показано [11, с. 9], что она существует.

Далее, из формулы (18) из [11] следует, что

$$r_x(\delta,h,\alpha)=\frac{T}{h}\alpha(\lambda^*)^{0.5}n\Big(\frac{L}{\lambda_*}(2\delta+h(K+1))+12\frac{\alpha}{\lambda_*^{1.5}}\frac{(2\delta+hK)}{h^2}+48\frac{\alpha^3}{\lambda_*^2}\frac{(2\delta+hK)}{(h)^3}\Big)$$
$$+n\Big(48\frac{\alpha^2}{\lambda_*}\frac{(2\delta+hK)}{h^2}+24\frac{\alpha^3}{\lambda_*^{1.5}}\frac{(2\delta+hK)}{h^3}\Big), \tag{4.11}$$

где λ_* и λ^* обозначают наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $G(t,x)G^\top(t,x)$:

$$\lambda_*\triangleq\min_{(t,x)\in D_0}\lambda_{\min}(G(t,x)G^\top(t,x)),\ \lambda^*\triangleq\max_{(t,x)\in D_0}\lambda_{\max}(G(t,x)G^\top(t,x)).$$

Показано [11, с. 237], что эти параметры существуют, и $0<\lambda_*\le\lambda^*<\infty$.

Введем вспомогательные константы

$$C_9\triangleq T(\lambda^*)^{0.5}2n\frac{L}{\lambda_*},\quad C_{10}\triangleq T(\lambda^*)^{0.5}n\frac{L}{\lambda_*}(K+1),\quad C_{11}\triangleq 24Tn\frac{(\lambda^*)^{0.5}}{\lambda_*^{1.5}},$$
$$C_{12}\triangleq 2TnK\frac{(\lambda^*)^{0.5}}{\lambda_*^{1.5}},\quad C_{13}\triangleq 96Tn\frac{(\lambda^*)^{0.5}}{\lambda_*^2},\quad C_{14}\triangleq 48TnK\frac{(\lambda^*)^{0.5}}{\lambda_*^2},\quad C_{15}\triangleq 96n\frac{1}{\lambda_*},$$
$$C_{16}\triangleq 48nK\frac{1}{\lambda_*},\quad C_{17}\triangleq 48n\frac{1}{\lambda_*^{1.5}},\quad C_{18}\triangleq 24nK\frac{1}{\lambda_*^{1.5}}.$$

Перепишем выражение (4.11) в этих константах:

$$r_x(\delta,h,\alpha)=C_9\frac{\delta\alpha}{h}+C_{10}\alpha+C_{11}\frac{\delta\alpha^2}{h^3}+C_{12}\frac{\alpha^2}{h^2}$$
$$+C_{13}\frac{\delta\alpha^4}{h^4}+C_{14}\frac{\alpha^4}{h^3}+C_{15}\frac{\delta\alpha^2}{h^2}+C_{16}\frac{\alpha^2}{h}+C_{17}\frac{\delta\alpha^3}{h^3}+C_{18}\frac{\alpha^3}{h^2}. \tag{4.12}$$

Таким образом, получены оценка для функции $r_k(\cdot)$ (4.10) и выражение для $r_x(\cdot)$ (4.12). Подставим их в оценку для $r_{\hat u}(\cdot)$ (4.9) и затем в оценку невязки траекторий (4.7):

$$\|\hat x^\delta(t)-x^*(t)\|\le e^{C_1T}\Big(\delta C_2+C_4\Big(\delta C_7+hC_8+C_6\frac{\delta}{h}+C_5\Big(C_9\frac{\delta\alpha}{h^2}+C_{10}\frac{\alpha}{h}+C_{11}\frac{\delta\alpha^2}{h^4}$$
$$+C_{12}\frac{\alpha^2}{h^3}+C_{13}\frac{\delta\alpha^4}{h^5}+C_{14}\frac{\alpha^4}{h^4}+C_{15}\frac{\delta\alpha^2}{h^3}+C_{16}\frac{\alpha^2}{h^2}+C_{17}\frac{\delta\alpha^3}{h^4}+C_{18}\frac{\alpha^3}{h^3}\Big)\Big)\Big).$$

Несложно проверить, что в таком случае при выполнения условий согласования (4.3) требование леммы (4.4) будет выполняться.

Приняв параметры h и α согласно (4.5), имеем

$$\|x^\delta(t)-x^*(t)\|\le e^{C_1T}\Big((C_4C_8+C_4C_5C_{10}+C_6+C_{12})\sqrt{\delta}+(C_2+C_4C_7+C_4C_5C_9$$
$$+C_4C_5C_{11}+C_{16})\delta+C_4C_5(C_{15}+C_{18})\delta^{1.5}+C_4C_5(C_{14}+C_{17})\delta^2+C_4C_5C_{13}\delta^{2.5}\Big).$$

Пусть $K_1\triangleq C_1,\ K_2\triangleq C_4C_8+C_4C_5C_{10}+C_6+C_{12}$, получаем окончательно

$$\|\hat x_\delta(t)-x^*(t)\|\le K_2e^{K_1T}\sqrt{\delta}+o(\sqrt{\delta}),\quad t\in[0,T].\qquad\square$$

Теперь опишем метод построения кусочно-постоянных слабых L^2-аппроксимаций $u_\delta(\cdot)$, которые удовлетворяют невыпуклым ограничениям (3.2). Будем использовать вспомогательные слабые L^2-аппроксимации $\hat u_\delta(\cdot)$ (4.1), удовлетворяющие выпуклым ограничениям (2.2).

Построение базируется на теореме Каратеодори о структуре выпуклого множества (теорема 17.1 из [18, с. 171]).

Зафиксируем δ и рассмотрим вспомогательную аппроксимацию $\hat{u}_\delta(\cdot)$. По теореме Каратеодори для каждого i-го отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ и соответствующего значения вспомогательной аппроксимации $\hat{u}_{\delta,i}$ существует выпуклая комбинация точек $\{\bar{u}_{i,k},\ k = 1, \ldots, m+1\}$ множества $\mathbf{U}$ такая, что

$$\hat{u}_{\delta,i} = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{i,k}\, \bar{u}_{i,k},$$
$$\lambda_{i,1} + \lambda_{i,2} + \ldots + \lambda_{i,m+1} = 1, \quad 0 \le \lambda_{i,k} \le 1, \quad k = 1, \ldots, m+1. \tag{4.13}$$

Базируясь на коэффициентах комбинации (4.13), можно построить дополнительное неравномерное разбиение каждого отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ на участки длин $h\lambda_{i,1},\ h\lambda_{i,2}, \ldots,\ h\lambda_{i,m+1}$. Для краткости обозначений назовем эти отрезки $\Lambda_{i,k}$.

Пусть на каждом i,k-м участке аппроксимации

$$u_\delta(t) = \bar{u}_{i,k}, \quad t \in \Lambda_{i,k}, \quad i = 0, \ldots, N-1, \quad k = 1, \ldots, m+1. \tag{4.14}$$

Таким образом, каждому вспомогательному управлению $\hat{u}_\delta(\cdot)$ ставится в соответствие аппроксимация $u_\delta(\cdot)$, построенная описанным способом (4.13), (4.14). Покажем, что аппроксимации $u_\delta(\cdot)$ удовлетворяют требованиям ЗРУ (3.8)–(3.10).

Отметим следующее свойство аппроксимаций:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (u_\delta(t) - \hat{u}_\delta(t))dt = 0, \quad i = 0, \ldots, N-1. \tag{4.15}$$

Действительно, по построению (4.13)

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (u_\delta(t) - \hat{u}_\delta(t))dt = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{\Lambda_{i,k}} (\bar{u}_{i,k} - \hat{u}_{\delta,i})dt = \sum_{k=1}^{m+1} [h\lambda_{i,j}\bar{u}_{i,k}] - h\hat{u}_{\delta,i} = 0.$$

Покажем теперь, что построенные аппроксимации $u_\delta(\cdot)$ сходятся слабо в L^2 к нормальному управлению.

Лемма 2. *Пусть аппроксимации $u_\delta(\cdot)$ построены на основании вспомогательных аппроксимаций $\hat{u}_\delta(\cdot)$ (4.1) по описанному способу* (4.13), (4.14).

Тогда выполняется условие слабой L^2-сходимости управлений $u_\delta(\cdot) \to u^*(\cdot)$ (3.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что имеет место сходимость (3.7):

$$\int_0^T \langle \xi(t), u_\delta(t) - \hat{u}_\delta(t)\rangle dt \xrightarrow{\delta\to 0} 0 \quad \forall \xi(\cdot) \in C([0,T], \mathbb{R}^m).$$

Разложим интеграл

$$\left| \int_0^T \langle \xi(t), u_\delta(t) - \hat{u}_\delta(t)\rangle dt \right| = \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \xi(t) - \xi(t_i) + \xi(t_i), u_\delta(t) - \hat{u}_\delta(t)\rangle dt \right] \right|$$
$$= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \xi(t) - \xi(t_i), u_\delta(t) - \hat{u}_\delta(t)\rangle dt + \left\langle \xi(t_i), \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (u_\delta(t) - \hat{u}_\delta(t))dt \right\} \right\rangle \right] \right|. \tag{4.16}$$

По свойству аппроксимаций (4.15) интегралы в фигурных скобках обращаются в ноль.

Оценим приращение непрерывной функции $\xi(\cdot)$ через ее модуль непрерывности $\omega_\xi(\cdot)$:

$$\|\xi(t) - \xi(t_i)\| \le \omega_\xi(h). \tag{4.17}$$

Подставим оценку (4.17) в (4.16):

$$\left| \int_0^T \langle \xi(t), u_\delta(t) - \hat{u}_\delta(t) \rangle dt \right| \le \sum_{i=0}^{N-1} h\omega_\xi(h) 2R_U \le 2T\omega_\xi(h)R_U \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

поскольку $N = \lceil T/h \rceil$.

Сходимость (3.7) доказана.

Из утверждения 1 следует, что в таком случае имеет место и слабая сходимость в пространстве L^2:

$$\int_0^T \langle \varphi(t), u_\delta(t) - \hat{u}_\delta(t) \rangle dt \xrightarrow{\delta\to 0} 0 \quad \forall \varphi(\cdot) \in L^2([0,T], \mathbb{R}^m). \tag{4.18}$$

Но предполагается, что по условию ЗРУ (3.10) вспомогательные аппроксимации $\hat{u}_\delta(\cdot)$ (4.1) сами сходятся слабо в L^2 к $u^*(\cdot)$. А значит, из (4.18) следует, что и аппроксимации $u_\delta(\cdot)$ слабо сходятся к $u^*(\cdot)$. □

Покажем теперь, что выполняется условие сходимости траекторий (3.9), и получим оценку невязки траекторий.

Лемма 3. *Пусть аппроксимации $u_\delta(\cdot)$ построены на основании вспомогательных аппроксимаций $\hat{u}_\delta(\cdot)$ (4.1) по описанному способу (4.13)), (4.14). И пусть $x_\delta(\cdot)$ и $\hat{x}_\delta(\cdot)$ — траектории системы (2.1), порождаемые соответственно аппроксимациями $u_\delta(\cdot)$ и $\hat{u}_\delta(\cdot)$ при одинаковых краевых условиях.*

Тогда найдется такая величина $R_{x_\delta}(h) > 0$, что

$$R_{x_\delta}(h) \xrightarrow{h\to 0} 0, \quad \|x_\delta(t) - \hat{x}_\delta(t)\| \le R_{x_\delta}(h), \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. Рассмотрим невязку

$$\begin{aligned}
\|x_\delta(t) - \hat{x}_\delta(t)\| = \Big\| \int_0^t \Big[& G(\tau, x_\delta(\tau))u_\delta(\tau) - G(\tau, \hat{x}_\delta(\tau))\hat{u}_\delta(\tau)\big[\pm G(\tau, \hat{x}_\delta(\tau))u_\delta(\tau)\big] \\
& + f(\tau, x_\delta(\tau)) - f(\tau, \hat{x}_\delta(\tau)) \Big] d\tau \Big\| \le \Big\| \int_0^t \big[G(\tau, \hat{x}_\delta(\tau))(u_\delta(\tau) - \hat{u}_\delta(\tau)) \big] d\tau \Big\| \\
& + \Big\| \int_0^t \big[(G(\tau, x_\delta(\tau)) - G(\tau, \hat{x}_\delta(\tau)))u_\delta(\tau) \big] d\tau \Big\| \\
& + \Big\| \int_0^t \Big[f(\tau, x_\delta(\tau)) - f(\tau, \hat{x}_\delta(\tau)) \Big] d\tau \Big\| \triangleq \mathbf{A_t} + \mathbf{B_t} + \mathbf{C_t}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

I. В выражении (4.19) оценим сначала первое слагаемое $\mathbf{A_t}$.

Будем предполагать, что вспомогательные аппроксимации $\hat{u}_\delta(\cdot)$ удовлетворяют условию (3.2) и условиям ЗРУ (3.9), (3.10). Тогда, во-первых, $\|\hat{u}_\delta(t)\| \le R_U$, и, во-вторых, в силу равномерной сходимости траекторий (3.9) (условие ЗРУ (3.9)) найдется такое значение $\hat{\delta}_0 \in (0, \delta_0]$, что при $\delta \in (0, \hat{\delta}_0]$

$$\hat{x}_\delta(t) \in \Psi \implies \|G(t, \hat{x}_\delta(t))\|_2 \le R_G, \quad \|f(t, \hat{x}_\delta(t))\| \le R_f, \quad t \in [0,T]$$

по определениям (3.6). Компакт Ψ определен в предположении 1 (подразд. 2.3, формула (2.4)).

Для любого момента $t \in [0,T]$ можно подобрать номер $j = j(t)$ такой, что $t \in [t_j, t_{j+1}]$, и

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_t} &= \Big\| \int_0^t \big[G(\tau,\hat{x}_\delta(\tau))(u_\delta(\tau)-\hat{u}_\delta(\tau))\big]d\tau \Big\| \\
&\le \Big\| \sum_{i=0}^{j-1} \Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big[\big(G(\tau,\hat{x}_\delta(\tau))\big[\pm G(t_i,\hat{x}_\delta(t_i))\big]\big)(u_\delta(\tau)-\hat{u}_\delta(\tau))\Big] d\tau \Big] \Big\| \\
&\qquad + \Big\| \int_{t_j}^{t} \big[G(\tau,\hat{x}_\delta(\tau))(u_\delta(\tau)-\hat{u}_\delta(\tau))\big]d\tau \Big\| \qquad (4.20) \\
&\le \sum_{i=0}^{j-1} \Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \big[\|G(\tau,\hat{x}_\delta(\tau)) - G(t_i,\hat{x}_\delta(t_i))\|\,\|u_\delta(\tau)-\hat{u}_\delta(\tau)\|\big]d\tau \\
&\qquad + \Big\| G(t_i,\hat{x}_\delta(t_i)) \Big\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (u_\delta(\tau)-\hat{u}_\delta(\tau))d\tau \Big\} \Big\| \Big] + hR_G 2R_U.
\end{aligned}$$

По свойству аппроксимаций (4.15) в последнем выражении обращаются в ноль интегралы в фигурных скобках.

В силу свойств (2.5) матрицы $G(\cdot)$

$$\|G(\tau,\hat{x}_\delta(\tau)) - G(t_i,\hat{x}_\delta(t_i))\| \le \omega_G(h) + L\|\hat{x}_\delta(\tau) - \hat{x}_\delta(t_i)\|, \qquad (4.21)$$

где $\omega_G(\cdot)$ — модуль непрерывности функции $\|G(\cdot)\|$.

При $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$: $\|\hat{x}_\delta(\tau) - \hat{x}_\delta(t_i)\| \le \int_{t_i}^{\tau} \|G(\theta,\hat{x}_\delta(\theta))\hat{u}_\delta(\theta) + f(\theta,\hat{x}_\delta(\theta))\|\,d\theta \le h(R_G R_U + R_f)$. А значит, возвращаясь к неравенству (4.21),

$$\|G(\tau,\hat{x}_\delta(\tau)) - G(t_i,\hat{x}_\delta(t_i))\| \le \omega_G(h) + h\,L(R_G R_U + R_f), \quad \tau \in [t_i, t_{i+1}]. \qquad (4.22)$$

Подставим оценку (4.22) в (4.20):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_t} &\le \sum_{i=1}^{N-1} \big[h\big(\omega_G(h) + h\,L(R_G R_U + R_f)\big)2R_U\big] + h\,2R_G R_U \\
&\le 2R_U T\big(\omega_G(h) + h\,L(R_G R_U + R_f)\big) + h\,2R_G R_U,
\end{aligned} \qquad (4.23)$$

поскольку $N = \lceil T/h \rceil$.

II. Оценим слагаемое $\mathbf{B_t}$ из выражения (4.19). В силу липшицевости (2.5) матрицы $G(\cdot)$

$$\mathbf{B_t} = \Big\| \int_0^t \big[\big(G(\tau,x_\delta(\tau)) - G(\tau,\hat{x}_\delta(\tau))\big)u_\delta(\tau)\big]d\tau \Big\| \le \int_0^t \big[L\|x_\delta(\tau) - \hat{x}_\delta(\tau)\|\,\|u_\delta(\tau)\|\big]d\tau. \qquad (4.24)$$

III. Оценим слагаемое $\mathbf{C_t}$ из выражения (4.19). В силу липшицевости (2.5) вектора $f(\cdot)$

$$\mathbf{C_t} = \Big\| \int_0^t \big[f(\tau,x_\delta(\tau)) - f(\tau,\hat{x}_\delta(\tau))\big]d\tau \Big\| \le \int_0^t L\|x_\delta(\tau) - \hat{x}_\delta(\tau)\|d\tau. \qquad (4.25)$$

Наконец, подставив оценки для $\mathbf{A_t}$ (4.23), $\mathbf{B_t}$ (4.24) и $\mathbf{C_t}$ (4.25) в оценку невязки (4.19), получаем

$$\|x_\delta(t) - \hat{x}_\delta(t)\| \le 2R_U T\big(\omega_G(h) + h\,L(R_G R_U + R_f)\big)$$
$$+ h\,2R_G R_U + \int_0^t [L\|x_\delta(\tau) - \hat{x}_\delta(\tau)\|(\|u_\delta(\tau)\| + 1)]\,d\tau.$$

Тогда по лемме Гронуолла — Беллмана

$$\|x_\delta(t) - \hat{x}_\delta(t)\| \le \Big(2R_U T\omega_G(h) + \big(2R_U TL(R_G R_U + R_f) + 2R_G R_U\big)h\Big)e^{LT(R_U+1)}$$
$$\triangleq \big(K_3\omega_G(h) + K_4 h\big)e^{K_1 T} \triangleq R_{x_\delta}(h) \xrightarrow{h\to 0} 0,$$
$$K_3 \triangleq 2R_U T, \quad K_4 \triangleq 2R_U TL(R_G R_U + R_f) + 2R_G R_U. \qquad \square$$

Из лемм 1 и 3 следует справедливость теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения* 1–5. *Пусть* $x_\delta(\cdot)$ *— траектории системы* (2.1), *порождаемые аппроксимациями* $u_\delta(\cdot)$ (4.13)*),* (4.14). *И пусть параметры* $\delta \le \delta_0,\ h = h(\delta) \le h_0,\ \alpha = \alpha(\delta) > 0$ *стремятся к нулю в согласовании* (4.3). *Тогда* $\|x_\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_C \xrightarrow{\delta\to 0} 0$.

Если выбрать параметры h *и* α *по формуле* (4.5), *то найдутся такие константы* K_1, K_3, K_5, *зависящие от свойств функций* $G(t,x)$ *и* $f(t,x)$ *из динамики* (2.1), *что*

$$\|x_\delta(t) - x^*(t)\| \le e^{K_1 T}(K_3\omega_G(\sqrt{\delta}) + K_5\sqrt{\delta}) + o(\delta).$$

Заключение

Рассмотрена задача реконструкции управлений для динамических детерминированных аффинно-управляемых систем, допускающая возникновение скользящих управлений, в случае невыпуклых геометрических ограничений на управления. Задача состоит в реконструкции неизвестного управления, порождающего наблюдаемую траекторию, на основании неточных дискретных замеров этой траектории.

Дано определение нормального управления — измеримого управления, порождающего наблюдаемую траекторию и определяемого единственным образом.

Показано, что в рассмотренном случае следует использовать сходимость аппроксимаций нормального управления в слабой топологии пространства L^2.

Поставлена корректная задача реконструкции нормального управления. Предложено и обосновано ее решение.

Авторы статьи выражают благодарность Михаилу Игоревичу Гомоюнову за ценные предложения и обсуждение данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
2. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
3. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129–161.
6. **Уткин В.И.** Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.

7. **Гамкрелидзе Р.В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. 230 с.
8. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
9. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
10. **Субботина Н.Н, Крупенников Е.А.** Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // Тр. МИАН. 2021. Т. 315. С. 247–260.
11. **Subbotina N.N., Krupennikov E.A.** Variational Approach to Construction of Piecewise-Constant Approximations of the Solution of Dynamic Reconstruction Problem // Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms / ed. Vladimir Vasilyev. Cham: Springer, 2023. P. 227–242. (Springer Proc. in Math. & Stat.; vol. 423.) doi: 10.1007/978-3-031-28505-9_16
12. **Subbotina N.N., Krupennikov E.A.** Variational approach to solving control reconstruction problems // Lobachevskii J. Math. 2022. Vol. 43, no. 6. P. 1428–1437. doi: 10.1134/S1995080222090268
13. **Hewitt E., Stromberg K.** Real and abstract analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1975. 490 p.
14. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М.: Физматлит, 2004. 572 с.
15. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
16. **Fattorini H.O.** Infinite dimensional optimization and control theory. NY: Cambridge Inc., 1999. 800 p.
17. **Стрекаловский А.С.** Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.
18. **Рокафеллар Р.Т.** Выпуклый анализ. 1973. 472 с. М.: Мир, 1973. 472 с.

Поступила 7.02.2024
После доработки 15.04.2024
Принята к публикации 22.04.2024

Субботина Нина Николаевна
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: subb@uran.ru

Крупенников Евгений Александрович
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
старший преподаватель
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: krupennikov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions*, London, Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 978-2881249440 .
2. Osipov Yu.S., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoi regulyarizatsii* [Foundations of method of dynamic regularization], Moscow, Moscow State Univ., 1999, 237 p. ISBN: 5-211-04085-6 .
3. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Modelling of a control in a dynamic system. *Engrg. Cybern.*, 1983, vol. 21, no. 2, pp. 38–47.
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . This book is substantially revised version of the monograph: Krasovskii N.N., Subbotin A.I., *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. Some algorithms for the dynamic reconstruction of inputs. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2011, vol. 275, Suppl. 1, pp. 86–120. doi: 10.1134/S0081543811090082

6. Utkin V.I. *Sliding modes in control and optimization*, Berlin, Heidelberg: Springer, 1992, 286 p. doi: 10.1007/978-3-642-84379-2 . Original Russian text published in Utkin V.I. *Skol'zyashchie rezhimy v zadachakh optimizatsii i upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1981, 368 p.
7. Gamkrelidze R.V. *Principles of optimal control theory*, NY, Springer, 1978, 175 p. doi: 10.1007/978-1-4684-7398-8. Original Russian text was published in Gamkrelidze R.V., *Osnovy optimal'nogo upravleniya*, Tbilisi, Tbilisi Univ. Publ., 1975. 230 p.
8. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, NY, Acad. Press, 1972, 531 p. doi: 10.1016/C2013-0-11669-8 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow, Nauka publ., 1977, 620 p.
9. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Solutions of ill-posed problems*, Washington: Winston; NY: Halsted Press, 1977, 258 p. ISBN: 978-0470991244 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 224 p.
10. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. Weak* solution to a dynamic reconstruction problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 315, pp. 233–246. doi: 10.1134/S0081543821050187
11. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. Variational approach to construction of piecewise-constant approximations of the solution of dynamic reconstruction problem. In: *Differential equations, mathematical modeling and computational algorithms*, ed. Vladimir Vasilyev, Cham, Springer, 2023, Ser. Springer Proc. in Math. & Stat, vol. 423, pp. 227–242. doi: 10.1007/978-3-031-28505-9_16
12. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. On regularization of a variational approach to solving control reconstruction problems. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 6, pp. 1428–1437. doi: 10.1134/S1995080222090268
13. Hewitt E., Stromberg K. *Real and abstract analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 1975. 490 p. ISBN: 0387901388 .
14. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*, vol. 1, 2. Transl. from 1st Russian ed. Mineola, NY, Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text (7th ed.) published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow, Fiz. Mat. Lit. Publ., 2004, 572 p. ISBN: 5-9221-0266-4 .
15. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. NY, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1967, 576 p. ISBN: 0471522635 . Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.
16. Fattorini H.O. *Infinite dimensional optimization and control theory*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, Inc, 1999, 800 p. ISBN: 9780521451253 .
17. Strekalovskii A.S. *Elementy nevypukloi optimizatsii* [Elements of nonconvex optimization]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2003, 356 p. ISBN: 5-02-032064-1 .
18. Rockafellar R.T. *Convex analysis*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1970, 472 p. doi: 10.1515/9781400873173 . Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1973, 472 p.

Received February 7, 2024
Revised April 15, 2024
Accepted April 22, 2024

Funding Agency: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

Nina Nikolaevna Subbotina, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: subb@uran.ru .

Evgenii Aleksandrovitch Krupennikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: krupennikov@imm.uran.ru .

Cite this article as: N. N. Subbotina, E. A. Krupennikov. On a control reconstruction problem with nonconvex constraints. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 188–202 .