ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 2 2024

УДК 519.63

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СУПЕРДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В. Г. Пименов, А. Б. Ложников

Рассматривается уравнение с дробными производными Рисса по пространству с функциональным эффектом запаздывания. Производится дискретизация задачи. Приводятся конструкции аналога разностного метода Кранка — Николсон с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением, который имеет второй порядок малости относительно шагов дискретизации по времени Δ и пространству h. Конструируется базовый метод Кранка — Николсон с кусочно-параболической интерполяцией и экстраполяцией продолжением. Изучается порядок невязки без интерполяции базового метода. Выписываются коэффициенты разложения невязки относительно Δ и h. Выводится уравнение для главного члена асимптотического разложения глобальной погрешности. При определенных предположениях обосновывается законность применения процедуры экстраполяции по Ричардсону, и строится соответствующий метод. Главное из этих предположений — согласованность порядков малости Δ и h. Доказывается, что метод имеет порядок $O(\Delta^3 + h^3)$.

Ключевые слова: дробные производные Рисса, уравнение супердиффузии, функциональное запаздывание, метод Кранка–Николсон, кусочно-параболическая интерполяция, экстраполяция продолжением, метод Ричардсона.

V. G. Pimenov, A. B. Lozhnikov. Asymptotic expansion of the error of a numerical method for solving a superdiffusion equation with functional delay.

An equation with Riesz fractional space derivatives and a functional delay effect is considered. The problem is discretized. Constructions of an analog of the Crank–Nicolson difference method with piecewise linear interpolation and extrapolation by continuation are presented. The method has the second order of smallness with respect to the time and space sampling steps Δ and h. The basic Crank–Nicolson method with piecewise parabolic interpolation and extrapolation by continuation is constructed. The order of the residual without interpolation of the basic method is studied. The expansion coefficients of the residual with respect to Δ and h are written. An equation is derived for the main term of the asymptotic expansion of the global error. Under certain assumptions, the legality of using the Richardson extrapolation procedure is substantiated and the corresponding method is constructed. The main of these assumptions is the consistency of the orders of smallness Δ and h. It is proved that the method has order $O(\Delta^3 + h^3)$.

Keywords: Riesz fractional derivatives, superdiffusion equation, functional delay, Crank–Nicolson method, piecewise parabolic interpolation, extrapolation by continuation, Richardson method.

MSC: 65N06, 65Q20

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-2-138-151

Введение

Уравнения в частных производных с запаздывающим аргументом широко применяются в математическом моделировании (см., например, [1; 2]), также в последнее время все чаще в математических моделях используются дробные производные.

Численные алгоритмы решения уравнений с частными производными с эффектом запаздывания изучались, например, в [3;4]. Литература по численным методам решения уравнений с дробными производными огромна, отметим лишь работы [5–9], в которых рассматривались уравнения супердиффузионного типа, т.е. с дробной производной по пространственной переменной порядка от 1 до 2. Однако в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием пока нет таких универсальных алгоритмов, которые могли бы быть положены в основу пакетов прикладных программ для решения подобных задач. На наш взгляд, одна из

причин этого — отсутствие процедур автоматического выбора шагов по времени и пространству с использованием заданной точности. В данной работе предлагается процедура экстраполяции Ричардсона, которая не только позволяет построить новый метод порядка $\Delta^3 + h^3$ на основе базового метода порядка $\Delta^2 + h^2$, но и применять процедуру Рунге практической оценки погрешности, что в перспективе может быть использовано для организации методов с автоматическим выбором шага. Основной результат статьи состоит в обосновании порядка асимптотического разложения глобальной погрешности для базового метода типа Кранка — Николсон с кусочно-параболической интерполяцией для решения супердиффузионного уравнения с функциональным запаздыванием.

Несмотря на то что идеи метода экстраполяции Ричардсона (см, например, [10;11]) являются классическими, интерес к его конструкциям в последнее время возрастает. Например, он недавно разработан для разных задач с постоянным запаздыванием: для волновых уравнений см. работу D. Deng, J. Chen [12], для уравнений Соболевского типа — работу C. Zhang, Z. Tan [13]. В отличие от этих и других исследований для уравнений с постоянным запаздыванием в данной работе наличие функционального запаздывания при выводе уравнения для асимптотического разложения глобальной погрешности приводит к функциональному уравнению в частных производных. В 2023 г. подобный результат мы получили также для диффузионного уравнения с функциональным запаздыванием (см. [14]) и для уравнения гиперболического типа с функциональным запаздыванием [15] (совместно с Е. Е. Ташировой).

1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим уравнение супердиффузионного типа с функциональным запаздыванием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d^+ \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_+ x^\alpha} + d^- \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_- x^\alpha} + f(x,t,u_t(x,\cdot)), \tag{1.1}$$

где $0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant x \leqslant X$ — независимые переменные, $u(x,t)$ — искомая функция решения, $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), \tau \leqslant s \leqslant 0\}$ — история искомой функции к моменту t, $\tau > 0$ — величина запаздывания, $d^+ > 0$ и $d^+ > 0$ соответственно — левый и правый коэффициент супердиффузии. Левосторонняя и правосторонняя дробные производные Римана — Лиувилля порядка α, $1 < \alpha < 2$, определяются формулами

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_+ x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^x \frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^{\alpha-1}} d\xi, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_- x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_x^X \frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^{\alpha-1}} d\xi. \tag{1.3}$$

В частности, в класс уравнений (1.1) входит уравнение с дробной производной Рисса по пространству

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d \frac{\partial^\alpha u}{\partial |x|^\alpha} + f(x,t,u_t(x,\cdot)),$$

где производная Рисса определяется через производные Римана — Лиувилля [16, с. 3]:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial |x|^\alpha} = K\Big(\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_+ x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_- x^\alpha}\Big), \quad K = -\frac{1}{2\cos\alpha(\pi/2)},$$

$d^+ = d^- = d$.

Заданы граничные условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(X,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.4}$$

и начальные условия

$$u(x,s)=\varphi(x,s),\quad 0\leqslant x\leqslant X,\quad -\tau\leqslant s\leqslant 0. \tag{1.5}$$

Будем предполагать, что решение $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.4), (1.5) существует и единственно. Кроме того, при доказательстве сходимости численных методов будем предполагать необходимую гладкость решения $u(x,t)$.

Обозначим через $C=C[-\tau,0]$ множество функций $q(s)$, непрерывных на отрезке $[-\tau,0]$, с нормой $\|q(\cdot)\|=\max\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}|q(s)|$. Дополнительно будем предполагать, что функционал $f\big(x,t,u_t(x,\cdot)\big)$ липшицев с константой L_f по последнему аргументу, т. е. существует постоянная L_f такая, что для всех $x\in[0,X]$, $t\leqslant 0$, $v^1(\cdot)\in C$, $v^2(\cdot)\in C$ выполняется

$$|f(x,t,v^1(\cdot))-f(x,t,v^2(\cdot))|\leqslant L_f\|v^1(\cdot)-v^2(\cdot)\|_C.$$

2. Дискретизация. Метод Кранка — Николсон с кусочно-линейной интерполяцией

Введем шаг по времени $\Delta=\dfrac{\tau}{M_0}$, где M_0 натуральное, и пусть $M=\Big[\dfrac{T}{\Delta}\Big]$. Введем точки (узлы по времени) $t_j=j\Delta$, $j=-M_0,\dots,M$. Полуцелые узлы будем обозначать $t_{j+\frac12}=t_j+\dfrac{\Delta}{2}$.

Разобьем отрезок $[0,X]$ на части, введя шаг по пространству $h=X/N$, где N целое, зададим точки (узлы по пространству) $x_i=ih$, $i=0,\dots,N$. Аппроксимацию функции $u(x_i,t_j)$ в узлах будем обозначать как U_i^j.

При всяком фиксированном $i=0,\dots,N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j, $j=0,\dots,M$: $\{U_k^i\}_j=\{U_k^i, j-M_0\leqslant k\leqslant j\}$. Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение $I:\{U_k^i\}_j\to U_j^i(\cdot)\in C[t_j-\tau,t_{j+\frac12}]$.

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2, такие, что для всех i, j и $t\in[t_j-\tau,t_{j+\frac12}]$ выполняется неравенство

$$|U_j^i(t)-u(x_i,t)|\leqslant C_1\max_{j-M_0\leqslant k\leqslant j}|U_k^i-u(x_i,t_k)|+C_2\Delta^p.$$

Рассмотрим кусочно-линейную интерполяцию $I(\{U_k^i\}_j)=U_j^i(\cdot)$, задаваемую соотношениями

$$U_j^i(t_j+s)=\frac{1}{\Delta}((t_k-t_j-s)U_{k-1}^i+(t_j+s-t_{k-1})U_k^i),\quad t_{k-1}\leqslant t_j+s\leqslant t_k, \tag{2.1}$$

с экстраполяцией продолжением

$$U_j^i(t_j+s)=\frac{1}{\Delta}((-s)U_{j-1}^i+(\Delta+s)U_j^i),\quad t_j\leqslant t_j+s\leqslant t_{j+\frac12}. \tag{2.2}$$

Кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет порядок 2, если точное решение $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по t на промежутке $[-\tau,T]$ (см. [17, с. 97]).

Для аппроксимации дробной производной Римана — Лиувилля в сеточных методах решения дробных по пространству уравнений диффузии использовались различные алгоритмы. Выберем алгоритм из работы W. Tian, H. Zhou, W. Deng [7].

Пусть

$$g_0^{(\alpha)}=1,\ g_{k+1}^{(\alpha)}=\big(1-\frac{\alpha+1}{k+1}\big)g_k^{(\alpha)},\quad \alpha\in(1,2),\quad k=0,1,2,\dots\ .$$

Введем сдвинутые разностные операторы, которые аппроксимируют левостороннюю и правостороннюю производные Римана — Лиувилля (1.2), (1.3) соответственно:

$$D_+^\alpha U_j^i = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i} w_k^\alpha U_j^{i-k+1}, \quad D_-^\alpha U_j^i = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{N-i+1} w_k^\alpha U_j^{i+k-1}.$$

Здесь коэффициенты w^α определяются соотношениями $w_0^\alpha = \dfrac{\alpha}{2}g_0^\alpha$, $w_k^\alpha = \dfrac{\alpha}{2}g_k^\alpha + \dfrac{2-\alpha}{2}g_{k-1}^\alpha$, $k \geqslant 1$.

Из результатов работы [7, формула (2.16)] следует, что если функции $u(x,t_j)$, $\dfrac{\partial^{\alpha+2}u(x,t_j)}{\partial_+ x^{\alpha+2}}$, $\dfrac{\partial^{\alpha+2}u(x,t_j)}{\partial_- x^{\alpha+2}}$ и их преобразования Фурье интегрируемы по x, то

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_j)}{\partial_+ x^\alpha} = D_+^\alpha u(x_i,t_j) + O(h^2), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_j)}{\partial_- x^\alpha} = D_-^\alpha u(x_i,t_j) + O(h^2). \tag{2.4}$$

Методом Кранка — Николсон назовем неявную разностную схему

$$\begin{aligned}\frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{\Delta} &= \frac{d^+}{2}D_+^\alpha U_{j+1}^i + \frac{d^-}{2}D_-^\alpha U_{j+1}^i + \frac{d^+}{2}D_+^\alpha U_j^i + \frac{d^-}{2}D_-^\alpha U_j^i \\ &+ f(x_i, t_{j+\frac12}, (U_j^i)_{t_{j+\frac12}}(\cdot)), \quad i = 1,\dots,N-1, \quad j = 0,\dots,M-1,\end{aligned} \tag{2.5}$$

с начальными условиями $U_j^i(t) = \varphi(x_i,t)$, $-\tau \leqslant t \leqslant 0$, $i = 0,\dots,N$, и граничными условиями $U_j^0 = 0$, $U_j^N = 0$, $j = 0,\dots,M$, где $(U_j^i)_{t_{j+\frac12}}(\cdot)$ — предыстория к моменту $t_{j+\frac12}$ результата действия оператора кусочно-линейной интерполяции (2.1) с экстраполяцией (2.2).

Этот метод был изучен нами в работе [9] (совместно с И. Мохаммадом) в более общем случае двух пространственных переменных. Как следует из результатов работы [9], метод устойчив и сходится с порядком $\Delta^2 + h^2$, т. е. найдется такая постоянная C, что $|u(x_i,t_j) - U_j^i| \leqslant C(\Delta^2 + h^2)$ для всех $j = 1,\dots,M$ и $i = 1,\dots,N-1$.

Цель этой статьи состоит в построении алгоритма более высокого порядка сходимости на основе метода (2.5).

3. Базовый метод Кранка — Николсон с кусочно-параболической интерполяцией

Построим базовый метод Кранка — Николсон с более точным способом интерполяции. В качестве такого способа выберем кусочно-параболическую интерполяцию, хотя можно применять любой способ интерполяции третьего порядка.

Будем разбивать отрезок запаздывания так, чтобы число точек делилось на 2: $M_0 = 2m$, где m натуральное. Пусть по-прежнему $\Delta = \dfrac{\tau}{M_0}$, $M = \left[\dfrac{T}{\Delta}\right]$, точки разбиения по времени $t_j = j\Delta$, $j = -M_0,\dots,M$. Разбиение по пространству не меняется.

Опишем кусочно-параболическую интерполяцию. При всяком фиксированном $i = 0,\dots,N$ и фиксированном $j = 0,\dots,M-1$ разобьем отрезок $[t_j - \tau, t_j]$ справа на подотрезки $[t_{j,l+1}, t_{j,l}]$, $l = 0,\dots,m-1$, длиной 2Δ таким образом, что $t_{j,0} = t_j$, $t_{j,1} = t_{j-2},\dots,t_{j,m} = t_{j-2m}$. Это значит, что $t_{j,l} = t_{j-2l}$, $l = 0,\dots,m$.

На каждом подотрезке $[t_{j,l+1}, t_{j,l}]$, $i = 0,\dots,N$, построим параболу — интерполяционный многочлен $L_2^l(t)$ в форме Лагранжа по узлам t_{j-2l-2}, t_{j-2l-1}, t_{j-2l} и значениям в узлах U_{j-2l-2}^i,

U^i_{j-2l-1}, U^i_{j-2l}:

$$L^l_2(t) = U^i_{j-2l-2}\frac{(t-t_{j-2l-1})(t-t_{j-2l})}{2\Delta^2} - U^i_{j-2l-1}\frac{(t-t_{j-2l-2})(t-t_{j-2l})}{\Delta^2}$$

$$+ U^i_{j-2l}\frac{(t-t_{j-2l-2})(t-t_{j-2l-1})}{2\Delta^2}.$$

В случае, если для узла, например, для $t_{j,l+1} = t_{j-2l-2}$, выполняется $t_{j-2l-2} < 0$, т. е. $j-2l-2<0$, то значение в узле берется из начальных условий $U^i_{j-2l-2} = \varphi(x_i, t_{j-2l-2})$.

Кусочно-параболическая интерполяция $I(\{U^i_k\}_j) = U^i_j(\cdot)$ задается равенством

$$U^i_j(t_j+s) = L^l_2(t_j+s), \quad t_{j-2l-2} \leqslant t_j+s \leqslant t_{j-2l}, \tag{3.1}$$

экстраполяция продолжением — равенством

$$U^i_j(t_j+s) = L^0_2(t_j+s), \quad t_j \leqslant t_j+s \leqslant t_{j+\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Кусочно-параболическая интерполяция имеет порядок 3, если точное решение $u(x,t)$ трижды непрерывно дифференцируемо по t на промежутке $[-\tau, T]$ [17, с.97].

Базовым методом назовем разностную схему Кранка — Николсон (2.5) с кусочно-параболической интерполяцией, где $(U^i_j)_{t_j}(\cdot)$ — предыстория к моменту t_j результата действия оператора кусочно-параболической интерполяции (3.1), с экстраполяцией продолжением (3.2). Хотя этот метод также имеет порядок $h^2+\Delta^2$, схема экстраполяции Ричардсона, примененная к этому методу, позволяет повысить порядок до $h^3+\Delta^3$.

4. Асимптотика аппроксимации дробной производной

Изучим асимптотику по h погрешности формул (2.3), (2.4).

Пусть $u(x)$ — функция, определенная на $[0, X]$, вне этого отрезка доопределим ее нулевыми значениями.

Следуя [7], введем обозначения

$$A^\alpha_{h,0}u(x) = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} g^\alpha_k u(x-kh),\ A^\alpha_{h,1}u(x) = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} g^\alpha_k u(x-kh+h),$$

$$B^\alpha_{h,0}u(x) = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} g^\alpha_k u(x+kh),\ A^\alpha_{h,1}u(x) = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} g^\alpha_k u(x+kh-h).$$

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$D^\alpha_+ u(x_i,t_j) = \frac{\alpha}{2}A^\alpha_{h,1}u(x_i,t_j) + \Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)A^\alpha_{h,0}u(x_i,t_j),$$

$$D^\alpha_- u(x_i,t_j) = \frac{\alpha}{2}B^\alpha_{h,1}u(x_i,t_j) + \Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)B^\alpha_{h,0}u(x_i,t_j).$$

Лемма 1. *Если функции* $u(x,t_j)$, $\dfrac{\partial^{\alpha+2}u(x,t_j)}{\partial_+ x^{\alpha+3}}$, $\dfrac{\partial^{\alpha+2}u(x,t_j)}{\partial_- x^{\alpha+3}}$ *и их преобразования Фурье интегрируемы по* x, *то*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_j)}{\partial_+ x^\alpha} &= D^\alpha_+ u(x_i,t_j) + R^\alpha_1(x_i,t_j)h^2 + O(h^3),\\ \frac{\partial^\alpha u(x_i,t_j)}{\partial_- x^\alpha} &= D^\alpha_- u(x_i,t_j) + R^\alpha_2(x_i,t_j)h^2 + O(h^3).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для краткости обозначим $u(x) = u(x, t_j)$ при фиксированном t_j. Преобразование Фурье левой и правой производной Римана — Лиувилля определяются соотношениями

$$F_+\Big(\frac{d^\alpha u(x)}{d_+x^\alpha}\Big) = (i\omega)^\alpha \hat{u}(\omega), \quad F_-\Big(\frac{d^\alpha u(x)}{d_-x^\alpha}\Big) = (-i\omega)^\alpha \hat{u}(\omega),$$

где $\hat{u}(\omega)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$: $\hat{u}(\omega) = \displaystyle\int_0^X e^{-i\omega x} u(x)dx$.

Тогда [7, формула (2.9)]

$$F_+\Big(\frac{d^\alpha u(x)}{d_+x^\alpha}\Big)(\omega) = (i\omega)^\alpha \Big(\frac{\alpha}{2} W_1(i\omega h) + \Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big) W_0(i\omega h)\Big)\hat{u}(\omega),$$

где

$$W_0(z) = \Big(\frac{1 - e^{-z}}{z}\Big)^\alpha, \quad W_1(z) = \Big(\frac{1 - e^{-z}}{z}\Big)^\alpha e^z, \quad z = i\omega h.$$

Воспользуемся разложениями

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots, \ \Big(\frac{1 - e^{-z}}{z}\Big) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots,$$

$$\Big(\frac{1 - e^{-z}}{z}\Big)^\alpha = 1 - \frac{\alpha}{2} z + \Big(\frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{8}\Big) z^2 + \dots,$$

$$\Big(\frac{1 - e^{-z}}{z}\Big)^\alpha e^z = 1 + \Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big) z + \Big(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{8}\Big) z^2 + \dots,$$

получим

$$F_+\Big(\frac{d^\alpha u(x)}{d_+x^\alpha}\Big)(\omega) = (i\omega)^\alpha \Big(1 + \Big(\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{8}\Big) + (1 - \frac{\alpha}{2})\Big(\frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{8}\Big)\Big) z^2 + \dots\Big)\hat{u}(\omega)$$

или

$$F_+\Big(\frac{d^\alpha u(x)}{d_+x^\alpha}\Big)(\omega) = (i\omega)^\alpha \Big(1 + M_+ z^2 + O(z^3)\Big)\hat{u}(\omega), \ M_+ = \frac{5\alpha}{12} - \frac{\alpha^2}{4}. \tag{4.2}$$

Аналогично

$$F_-\Big(\frac{d^\alpha u(x)}{d_-x^\alpha}\Big)(\omega) = (-i\omega)^\alpha \big(1 + M_+ z^2 + O(z^3)\big)\hat{u}(\omega).$$

Обозначим

$$\hat{\varphi}(\omega, h) = F_+\Big(\frac{d^\alpha u(x)}{d_+x^\alpha}\Big)(\omega) - (i\omega)^\alpha \big(1 + M_+ (i\omega h)^2\big)\hat{u}(\omega), \tag{4.3}$$

тогда из (4.2) имеем

$$|\hat{\varphi}(\omega, h)| \leqslant C h^3 |i\omega|^{\alpha+3} \hat{u}(\omega). \tag{4.4}$$

Возьмем обратное преобразование Фурье от обеих частей соотношения (4.3), получим

$$\frac{d^\alpha u(x)}{d_+x^\alpha} = D_+^\alpha u(x) + M_+ \frac{d^{\alpha+2} u(x)}{d_+x^{\alpha+2}} h^2 + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\omega, h) d\omega. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и условий леммы вытекает

$$|\hat{\varphi}| \leqslant C \Big\| F_+\Big(\frac{d^{\alpha+3} u(x)}{d_+x^{\alpha+3}}\Big)\Big\|_{L^1} h^3 = O(h^3). \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) следует первое соотношение (4.1) с

$$R_1^\alpha(x_i, t_j) = M_+ \frac{d^{\alpha+2} u(x_i, t_j)}{d_+x^{\alpha+2}}, \quad M_+ = \frac{5\alpha}{12} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Аналогично выводится второе соотношение (4.1).

Лемма доказана.

5. Невязка без интерполяции метода

Невязкой без интерполяции метода (2.5) назовем

$$\psi_j^i = \frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{\Delta} - \frac{d^+}{2}D_+^\alpha u(x_i,t_{j+1}) - \frac{d^-}{2}D_-^\alpha u(x_i,t_{j+1}) - \frac{d^+}{2}D_+^\alpha u(x_i,t_j) - \frac{d^-}{2}D_-^\alpha u(x_i,t_j) - f(x_i,t_{j+\frac12},u_{t_{j+\frac12}}(x_i,\cdot)). \tag{5.1}$$

Лемма 2. *Если точное решения $u(x,t)$ шесть раз непрерывно дифференцируемо по x и по t, причем смешанные частные до шестого порядка непрерывны, а также выполняются условия леммы* 1*, то невязка без интерполяции* (5.1) *представима в виде*

$$\psi_j^i = R_1(x_i,t_j)\Delta^2 + R_2(x_i,t_j)h^2 + O(\Delta^4+h^3+\Delta^2h^2). \tag{5.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для значений функции $u(x,t)$, входящих в определение невязки, имеем следующие равенства:

$$u(x_i,t_{j+1}) = u(x_i,t_{j+\frac12}) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_{j+\frac12})\frac{\Delta}{2} + \frac18\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_{j+\frac12})\Delta^2 + \frac{1}{48}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,t_{j+\frac12})\Delta^3 + \frac{1}{384}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,t_{j+\frac12})\Delta^4 + O(\Delta^5),$$

$$u(x_i,t_j) = u(x_i,t_{j+\frac12}) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_{j+\frac12})\frac{\Delta}{2} + \frac18\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_{j+\frac12})\Delta^2 - \frac{1}{48}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,t_{j+\frac12})\Delta^3 + \frac{1}{384}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,t_{j+\frac12})\Delta^4 + O(\Delta^5).$$

Из леммы 1 получаем

$$\frac{d^+}{2}D_+^\alpha u(x_i,t_{j+1}) + \frac{d^-}{2}D_-^\alpha u(x_i,t_{j+1}) = \frac{d^+}{2}\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_{j+1})}{\partial_+x^\alpha} + \frac{d^-}{2}\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_{j+1})}{\partial_-x^\alpha} - \frac{d^+}{2}R_1^\alpha(x_i,t_{j+1})h^2 - \frac{d^-}{2}R_2^\alpha(x_i,t_{j+1})h^2 + O(h^3),$$

$$\frac{d^+}{2}D_+^\alpha u(x_i,t_j) + \frac{d^-}{2}D_-^\alpha u(x_i,t_j) = \frac{d^+}{2}\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_j)}{\partial_+x^\alpha} + \frac{d^-}{2}\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_j)}{\partial_-x^\alpha} - \frac{d^+}{2}R_1(x_i,t_j)h^2 - \frac{d^-}{2}R_2(x_i,t_j)h^2 + O(h^3).$$

Используем также разложения

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_{j+1})}{\partial_+x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_+x^\alpha} + \frac{\partial^{\alpha+1}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_+x^{\alpha+1}}\frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^{\alpha+2}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_+x^{\alpha+2}}\frac{\Delta^2}{8} + \frac{\partial^{\alpha+3}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_+x^{\alpha+3}}\frac{\Delta^3}{48} + O(\Delta^4),$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_j)}{\partial_+x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_+x^\alpha} - \frac{\partial^{\alpha+1}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_+x^{\alpha+1}}\frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^{\alpha+2}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_+x^{\alpha+2}}\frac{\Delta^2}{8} - \frac{\partial^{\alpha+3}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_+x^{\alpha+3}}\frac{\Delta^3}{48} + O(\Delta^4),$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_{j+1})}{\partial_-x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_-x^\alpha} + \frac{\partial^{\alpha+1}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_-x^{\alpha+1}}\frac{\Delta}{2}$$

$$+\frac{\partial^{\alpha+2}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_-x^{\alpha+2}}\frac{\Delta^2}{8}+\frac{\partial^{\alpha+3}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_-x^{\alpha+3}}\frac{\Delta^3}{48}+O(\Delta^4),$$

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x_i,t_j)}{\partial_-x^{\alpha}}=\frac{\partial^{\alpha}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_-x^{\alpha}}-\frac{\partial^{\alpha+1}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_-x^{\alpha+1}}\frac{\Delta}{2}$$

$$+\frac{\partial^{\alpha+2}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_-x^{\alpha+2}}\frac{\Delta^2}{8}-\frac{\partial^{\alpha+3}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_-x^{\alpha+3}}\frac{\Delta^3}{48}+O(\Delta^4),$$

$$R_1^{\alpha}(x_i,t_{j+1})=R_1^{\alpha}(x_i,t_{j+\frac12})+\frac{\partial R_1^{\alpha}}{\partial t}(x_i,t_{j+\frac12})\frac{\Delta}{2}+O(\Delta^2),$$

$$R_1^{\alpha}(x_i,t_j)=R_1^{\alpha}(x_i,t_{j+\frac12})-\frac{\partial R_1^{\alpha}}{\partial t}(x_i,t_{j+\frac12})\frac{\Delta}{2}+O(\Delta^2),$$

$$R_2^{\alpha}(x_i,t_{j+1})=R_2^{\alpha}(x_i,t_{j+\frac12})+\frac{\partial R_2^{\alpha}}{\partial t}(x_i,t_{j+\frac12})\frac{\Delta}{2}+O(\Delta^2),$$

$$R_2^{\alpha}(x_i,t_j)=R_2^{\alpha}(x_i,t_{j+\frac12})-\frac{\partial R_2^{\alpha}}{\partial t}(x_i,t_{j+\frac12})\frac{\Delta}{2}+O(\Delta^2).$$

В результате, используя то, что $u(x_i,t_{j+\frac12})$ — решение уравнения (1.1) в точке $(x_i,t_{j+\frac12})$, получаем соотношение (5.2), где

$$R_1(x_i,t_j)=\frac{1}{24}\frac{\partial^3u}{\partial t^3}(x_i,t_{j+\frac12})-\frac{d^+}{4}\frac{\partial^{\alpha+2}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_+x^{\alpha+2}}-\frac{d^-}{4}\frac{\partial^{\alpha+2}u(x_i,t_{j+\frac12})}{\partial_-x^{\alpha+2}},$$

$$R_2(x_i,t_j)=-d^+R_1^{\alpha}(x_i,t_{j+\frac12})-d^-R_2^{\alpha}(x_i,t_{j+\frac12}).$$

Лемма доказана.

6. Явная векторная форма базового метода и его невязки с интерполяцией

При каждом j определим значения дискретной модели (2.5), (3.1), (3.2) вектором

$$U_j=(U_j^1,U_j^2,\dots,U_j^{N-1})'\in Y;$$

здесь Y — векторное пространство размерности $N-1$, $'$ — знак транспонирования. Определим норму в пространстве Y соотношением $\|U_j\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1}|U_j^i|$. Пусть $\{U_k^i\}_j$ — предыстория векторной дискретной модели к моменту t_j.

В пространстве Y введем оператор A:

$$AU_j^i=-\frac{d^+}{2}D_+^{\alpha}U_j^i-\frac{d^-}{2}D_-^{\alpha}U_j^i$$

и обозначим через $F_j\in Y$ вектор с координатами $f(x_i,t_{j+\frac12},(U_j^i)_{t_{j+\frac12}}(\cdot))$. Тогда система (2.5) перепишется в виде уравнения

$$(E+\Delta A)U_{j+1}=(E-\Delta A)U_j+\Delta F_j, \tag{6.1}$$

E — единичный оператор.

Уравнение (6.1) можно привести к явной форме

$$U_{j+1}=SU_j+\Delta\Phi_j,\quad S=(E+\Delta A)^{-1}(E-\Delta A),\quad \Phi_j=(E+\Delta A)^{-1}F_j. \tag{6.2}$$

Оператор S обеспечивает свойство стабильности метода, см. [7, Theorem 3.1].

Введем вектор невязки без интерполяции $\psi_j = (\psi_j^1, \psi_j^2, \ldots, \psi_j^{N-1})'$, который определяется соотношением

$$\psi_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta} + Au_{j+1} + Au_j - \tilde{F}_j,$$

где $u_j = (u(x_1, t_j), u(x_2, t_j), \ldots, u(x_{N-1}, t_j))'$ — вектор точного решения, $\tilde{F}_j = F_j(u_{t_{j+1/2}}(\cdot))$ — вектор с координатами $f(x_i, t_{j+1/2}, u_{t_{j+1/2}}(x_i, \cdot))$, $u_{t_{j+1/2}}(\cdot)$ — векторная предыстория точного решения к моменту $t_{j+1/2}$. Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{u_{j+1} - Su_j}{\Delta} = (E + \Delta A)^{-1}(\tilde{F}_j + \psi_j).$$

Определим кусочно-параболическую интерполяцию точного решения $u(x_i, t_j)$ с экстраполяцией продолжением аналогично (3.1), (3.2).

Невязка с интерполяцией определяется для данного метода в виде

$$d_j = \frac{u_{j+1} - Su_j}{\Delta} - (E + \Delta A)^{-1}\hat{F}_j;$$

здесь $\hat{F}_j = F_j(I(\{u_k\}_j))$ — вектор с координатами $f(x_i, t_{j+1/2}, (\hat{u}_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot))$, $(\hat{u}_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot)$ — предыстория к моменту $t_{j+1/2}$ кусочно-кубической интерполяции (3.1) с экстраполяцией продолжением (3.2) точного решения.

Таким образом, имеем соотношение между невязкой с интерполяцией и невязкой без интерполяции $d_j = (E + \Delta A)^{-1}\psi_j + (E + \Delta A)^{-1}\tilde{F}_j - \hat{F}_j$.

Из этого соотношения и из того, что оператор кусочно-параболической интерполяции с экстраполяцией продолжением имеет порядок 3, вытекает

Лемма 3. *Если выполняются условия леммы* 2*, то невязка с интерполяцией представима в виде*

$$\begin{gathered} d_j = \hat{R}_j\Delta^2 + \tilde{R}_j h^2 + O(\Delta^3 + h^3 + \Delta^2 h^2), \\ \hat{R}_j = (E + \Delta A)^{-1}R_{1,j}, \quad \tilde{R}_j = (E + \Delta A)^{-1}R_{2,j}, \end{gathered} \tag{6.3}$$

$R_{1,j}$ — вектор с координатами $R_1(x_i, t_j)$, $R_{2,j}$ — вектор с координатами $R_2(x_i, t_j)$.

7. Асимптотическое представление глобальной погрешности базового метода

Определим векторную погрешность метода (6.1) как вектор ε_j с координатами ε_j^i, $i = 1, \ldots, N-1$, где $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - U_j^i$.

В этом разделе будем предполагать выполнение следующих условий.

Предположение 1. *Функционал $f\big(x, t, u_t(x, \cdot)\big)$ по последнему аргументу дважды дифференцируем по Фреше (см., например,* [18, с.154]*), причем вторая производная Фреше ограничена.*

Предположение 2. *Выполнено условие согласования шагов $h = H\Delta$, H — постоянная.*

С учетом предположения 2 соотношение (6.3) перепишется в виде

$$d_j = \gamma(t_j)\Delta^2 + O(\Delta^3), \quad \gamma(t_j) = \hat{R}_j + H\tilde{R}_j. \tag{7.1}$$

Обозначим координаты вектора $\gamma(t_j)$ через $\gamma(x_i, t_j)$. Пусть $\gamma(x, t)$ — непрерывная функция, совпадающая в узлах с определенной выше.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} = d^+\frac{\partial^\alpha e(x,t)}{\partial_+ x^\alpha} + d^-\frac{\partial^\alpha e(x,t)}{\partial_- x^\alpha} + \langle G, e_t(x, \cdot)\rangle - \gamma(x, t) \tag{7.2}$$

с начальными условиями $e(x,t)=0, -\tau\leqslant t\leqslant 0$, и граничными условиями $e(0,t)=e(X,t)=0$. Здесь G — производная Фреше функционала $f\big(x,t,u_t(x,\cdot)\big)$ по последнему аргументу, $\langle G, e_t(x,\cdot)\rangle$ — результат действия G на предысторию $e_t(x,\cdot)$.

Предположение 3. *Уравнение* (7.2) *имеет единственное решение* $e(x,t)$*, причем функция* $e(x,t)$ *четыре раза непрерывно дифференцируема по* x *и* t*.*

Уравнение (7.2) является частным случаем уравнения (1.1), поэтому для его приближенного решения можно рассмотреть численный метод (2.5). Введем невязку без интерполяции для метода (2.5), примененного к уравнению (7.2):

$$\breve{\psi}_j^i=\frac{e(x_i,t_{j+1})-e(x_i,t_j)}{\Delta}-\frac{d^+}{2}D_+^\alpha e(x_i,t_{j+1})-\frac{d^-}{2}D_-^\alpha e(x_i,t_{j+1})$$
$$-\frac{d^+}{2}D_+^\alpha e(x_i,t_j)-\frac{d^-}{2}D_-^\alpha e(x_i,t_j)-\langle G, e_{t_{j+\frac12}}(x_i,\cdot)\rangle+\gamma(x_i,t_{j+\frac12}).$$

Подобно лемме 2 проверяется, что при выполнении условия 2 справедливо представление

$$\breve{\psi}_j^i=O(\Delta^2). \tag{7.3}$$

Лемма 4. *Если выполняются условия леммы* 2*, а также условия* 1–3*, то погрешность метода* (6.2) *представима в виде*

$$\varepsilon_j=-e(t_j)\Delta^2+O(\Delta^3),$$

где вектор-функция $e(t_j)$ *имеет координаты* $e(x_i,t_j)$*, функция* $e(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (7.2)*.*

Доказательство. Рассмотрим векторную величину

$$\hat{U_j}=U_j-e(t_j)\Delta^2,\quad j=0,1,\dots,M, \tag{7.4}$$

как результат применения нового метода. Тогда для всех $j=0,1,\dots,M-1$ получаем из (6.2)

$$\hat{U}_{j+1}=U_{j+1}-e(t_{j+1})\Delta^2=SU_j+\Delta(E+\Delta A)^{-1}F_j-e(t_{j+1})\Delta^2$$
$$=S\hat{U}_j+Se(t_j)\Delta^2+\Delta(E+\Delta A)^{-1}F_j(I(\{\hat{U}_k+e(t_k)\Delta^2\}_j))-e(t_{j+1})\Delta^2.$$

Вычислим невязку с интерполяцией этого метода

$$\hat{d_j}=\frac{u_{j+1}-Su_j}{\Delta}-(E+\Delta A)^{-1}\hat{F}_j+e(t_{j+1})\Delta-Se(t_j)\Delta-(E+\Delta A)^{-1}\check{F}_j+(E+\Delta A)^{-1}\hat{F}_j, \tag{7.5}$$

где $\check{F}_j=F_j(I(\{u_k+e(t_k)\Delta^2\}_j))$.

В силу предположения 1 (с использованием разложения Тейлора для функционала [18, с. 154]) и линейности оператора интерполяции выполняется

$$\check{F}_j-\hat{F}_j=F_j(I(\{u_k+e(t_k)\Delta^2\}_j))-F_j(I(\{u_k\}_j))=\langle G, I(\{e(t_k)\}_j)\rangle\Delta^2+O(\Delta^4).$$

Следовательно, последние четыре слагаемых в правой части (7.5) можно переписать в виде

$$e(t_{j+1})\Delta-Se(t_j)\Delta-(E+\Delta A)^{-1}\check{F}_j+(E+\Delta A)^{-1}\hat{F}_j$$
$$=\Delta^2\Big\{\frac{e(t_{j+1})-Se(t_j)}{\Delta}-(E+\Delta A)^{-1}\big\langle G(), I(\{e(t_k)\}_j)\big\rangle\Big\}+O(\Delta^4).$$

Так как каждая координата вектора $e(t)$ является решением уравнения (7.2), то в силу (7.3) в последнем равенстве выражение в фигурных скобках равно $-\gamma(t_j)+O(\Delta^2)$, поэтому

$$e(t_{j+1})\Delta-Se(t_j)\Delta-(E+\Delta A)^{-1}\check{F}_j+B^{-1}\hat{F}_j=-\gamma(t_j)\Delta^2+O(\Delta^4). \tag{7.6}$$

В силу леммы 3 и соотношения (7.1) для первых двух слагаемых в правой части (7.5) выполняется

$$\frac{u_{j+1} - Su_j}{\Delta} - (E + \Delta A)^{-1}\hat{F}_j = \gamma(t_j)\Delta^2 + O(\Delta^3). \tag{7.7}$$

Из (7.5)–(7.7) следует, что невязка с интерполяцией метода (7.4) имеет порядок $O(\Delta^3)$, оператор интерполяции также имеет порядок $O(\Delta^3)$, значит метод (7.4) сходится с порядком $O(\Delta^3)$, откуда вытекает заключение леммы.

Лемма доказана.

8. Схема Ричардсона и практическая оценка погрешности

Пусть $u_j^i(h, \Delta)$ — результат метода Кранка — Николсон (2.5) с кусочно-параболической интерполяцией (3.1), с экстраполяцией продолжением (3.2), с шагом по пространству h и с шагом по времени Δ. Обозначим

$$U_j^i = \frac{4}{3}u_j^i(h/2, \Delta/2) - \frac{1}{3}u_j^i(h, \Delta). \tag{8.1}$$

Этот метод является аналогом схемы экстраполяции Ричардсона.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы* 4. *Тогда метод* (8.1) *сходится с третьим порядком по* Δ *и* h.

Доказательство. Обозначим через $U_j(h, \Delta)$ вектор с координатами $U_j^i(h, \Delta)$. Тогда, если $\hat{u}_j$ — вектор точного решения, $u_j(h, \Delta)$ — вектор с координатами $u_j^i(h, \Delta)$, $\varepsilon_j(h, \Delta)$ — векторная погрешность метода (2.5), (3.1), (3.2), то векторная погрешность метода (8.1) представима в виде

$$(\varepsilon_U)_j = \hat{u}_j - U_j(h, \Delta) = \hat{u}_j - u_j(h/2, \Delta/2) - \frac{1}{3}\big(u_j(h/2, \Delta/2) - u_j(h, \Delta) - \hat{u}_j + \hat{u}_j\big)$$

$$= \big[\varepsilon_j(h/2, \Delta/2) + e(t_j)(\Delta/2)^2\big] - \frac{1}{3}\big([-\varepsilon_j(h/2, \Delta/2) - e(t_j)(\Delta/2)^2] + [\varepsilon_j(h, \Delta) + e(t_j)\Delta^2]\big).$$

Так как в силу леммы 4 каждое выражение в квадратных скобках сходится с третьим порядком, то отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

При условиях леммы 4 можно получить асимптотическую оценку погрешности базового метода (метод Рунге практической оценки погрешности).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы* 4. *Тогда справедливы формулы Рунге*

$$\varepsilon_j(h, \Delta) = \frac{4}{3}(u_j(h/2, \Delta/2) - u_j(h, \Delta)) + r_1,$$

$$\varepsilon_j(h/2, \Delta/2) = \frac{1}{3}(u_j(h/2, \Delta/2) - u_j(h, \Delta)) + r_2,$$

где векторы r_1 *и* r_2 *имеют третий порядок малости относительно* Δ.

Доказательство. Согласно утверждению леммы 4 имеют место соотношения

$$\hat{u}_j - u_j(h, \Delta) - e(t_j)\Delta^2 = \tilde{r}_1, \tag{8.2}$$

$$\hat{u}_j - u_j(h/2, \Delta/2) - e(t_j)(\Delta/2)^2 = \tilde{r}_2,$$

где вектора $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$ имеют третий порядок малости относительно Δ. Исключим из этих соотношений вектор точного решения $\hat{u}_j$, получим

$$u_j(h/2, \Delta/2) - u_j(h, \Delta) - \frac{3}{4}e(t_j)\Delta^2 = r_1 - r_2,$$

отсюда

$$e(t_j) = \frac{4}{3}(u_j(h/2, \Delta/2) - u_j(h, \Delta)) - \frac{4}{3}(r_1 - r_2).$$

Из этого соотношения, формул (8.2) и определения погрешности $\varepsilon_j(h, \Delta) = \hat{u}_j - u_j(h, \Delta)$ вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Формулы Рунге могут быть использованы для организации вычислений с переменным шагом, определяемым заданной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wu J.** Theory and application of partial functional differential equations. NY: Springer-Verlag, 1996. 438 p.
2. **Polyanin A., Sorokin V., Zhurov A.** Delay ordinary and partial differential equations. London, NY: CRC Press. Boca Raton, 2023. 400 p.
3. **Камонт З., Кропельницка К.** Неявные разностные методы для эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычислит. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 361–379.
4. **Пименов В.Г.** Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 134 с.
5. **Meerschaert M.M., Tadjeran C.** Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations // Appl. Numer. Math. 2006. Vol. 56 (1). P. 80–90. doi: 10.1016/j.apnum.2005.02.008
6. **Tadjeran C., Meerschaert M.M., Scheffler H.P.** A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. 2006. Vol. 213 (1). P. 205–213. doi: 10.1016/j.jcp.2005.08.008
7. **Tian W., Zhou H., Deng W.** A class of second order difference approximation for solving space fractional diffusion equations // Math. Comput. 2015. Vol. 84 (294). P. 1703–1727. doi: 10.48550/arXiv.1201.5949
8. **Pimenov V.G., Hendy A.S.** A fractional analog of Crank–Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay // Ural Math. J. 2016. Vol. 2 (1). P. 48–57. doi: 10.15826/umj.2016.1.005
9. **Ibrahim M., Pimenov V.G.** Crank-Nikolson scheme for two-dimensional in space fractional equations with functional delay // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. унив-та. 2021. Т. 57. С. 128–141. doi: 10.35634/2226-3594-2021-57-05
10. **Марчук Г.И., Шайдуров В.В.** Повышение точности решении разностных схем. М. : Наука, 1989. 320 с.
11. **Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
12. **Deng D., Chen J.** Explicit Richardson extrapolation methods and their analyses for solving two-dimensional nonlinear wave equation with delays // Networks and Heterogeneous Media. 2023. Vol. 18, no. 1. P. 412–443. doi: 10.3934/nhm.2023017
13. **Zhang C., Tan Z.** Linearized compact difference methods combined with Richardson extrapolation for nonlinear delay Sobolev equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020. Vol. 1, 105461. doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105461
14. **Пименов В.Г., Ложников А.Б.** Метод Ричардсона для диффузионного уравнения с функциональным запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 133–144. doi: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-133-144
15. **Пименов В.Г., Таширова Е.Е.** Асимптотическое разложение погрешности численного метода для решения волнового уравнения с функциональным запаздыванием // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. унив-та. 2023. Т. 62. С. 71–86.

16. **Li C.P., Zeng F.H.** Numerical methods for fractional calculus. London, NY: Boca Raton. CRC Press, 2015. 294 p.
17. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М. ; Ижевск : РХД, 2004. 256 с.
18. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 426 с.

Поступила 5.04.2024
После доработки 3.05.2024
Принята к публикации 6.05.2024

Пименов Владимир Германович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Ложников Андрей Борисович
канд. физ.-мат. наук, доцент
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ablozhnikov@yandex.ru

REFERENCES

1. Wu J. *Theory and application of partial functional differential equations*. NY, Springer-Verlag, 1996, 438 p. doi: 10.1007/978-1-4612-4050-1
2. Polyanin A., Sorokin V., Zhurov A. *Delay ordinary and partial differential equations*. CRC Press: Taylor & Francis Group Publ., 2023, 434 p. doi: 10.1201/9781003042310
3. Kamont Z., Kropielnicka K. Implicit difference methods for evolution functional differential equations. *Num. Anal. Appl.*, 2011, Vol. 4, no. 4, pp. 294–308. doi: 10.1134/S1995423911040033
4. Pimenov V.G. *Raznostnyye metody resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh s nasledstvennost'yu* [Difference methods for solving partial differential equations with heredity]. Yekaterinburg, Ural University Publ., 2014, 134 p. ISBN: 978-5-7996-1364-8 .
5. Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 2006, vol. 56, no. 1, pp. 80–90. doi: 10.1016/j.apnum.2005.02.008
6. Tadjeran C., Meerschaert M.M., Scheffler H.P. A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation. *J. Comp. Phys.*, 2006, vol. 213, no. 1, pp. 205–213. doi: 10.1016/j.jcp.2005.08.008
7. Tian W., Zhou H., Deng W. A class of second order difference approximation for solving space fractional diffusion equations. *Math. Comp.*, 2015, vol. 84, no. 294, pp. 1703–1727. doi: 10.1090/S0025-5718-2015-02917-2
8. Pimenov V.G., Hendy A.S. A fractional analog of Crank — Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 1, pp. 48–57. doi: 10.15826/umj.2016.1.005
9. Ibrahim M., Pimenov V.G. Crank — Nikolson scheme for two-dimensional in space fractional equations with functional delay. *Izv. IMI UdGU*, 2021, vol. 57, pp. 128–141. doi: 10.35634/2226-3594-2021-57-05
10. Marchuk G.I., *Povysheniye tochnosti resheniy raznostnykh skhem* [Improving the accuracy of solutions of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p.
11. Hairer E., Nersett S., Wanner G. *Solving ordinary differential equations. Nonstiff problems*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 1993, 528 p. doi: 10.1007/978-3-540-78862-1
12. Deng D., Chen J. Explicit Richardson extrapolation methods and their analyses for solving two-dimensional nonlinear wave equation with delays. *Networks and Heterogeneous Media*, 2023, vol. 18, no. 1, pp. 412–443. doi: 10.3934/nhm.2023017

13. Zhang C., Tan Z. Linearized compact difference methods combined with Richardson extrapolation for nonlinear delay Sobolev equations. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 2020, vol. 1, art. no. 105461, 18 p. doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105461
14. Pimenov V.G., Lozhnikov A.B. Richardson Method for a Diffusion Equation with Functional Delay. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 321, suppl. 1, pp. S204–S215. doi: 10.1134/S0081543823030173
15. Pimenov V.G., Tashirova E.E. Asymptotic expansion of the error of the numerical method for solving wave equation with functional delay. *Izv. IMI UdGU*, 2023, vol. 62, pp. 71–86 (in Russian). doi: 10.35634/2226-3594-2023-62-06
16. Li C.P., Zeng F.H. *Numerical methods for fractional calculus*, London, NY, Boca Raton. CRC Press, 2015, 294 p. doi: 10.1201/b18503
17. Kim A.V., Pimenov V.G. *i-Gladkii analiz i chislennye metody resheniya funktsionalno-differentsialnykh uravnenii, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika* [i-Smooth analysis and numerical methods for solving functional-differential equations]. Izhevsk, Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika Publ., 2004, 256 p. ISBN: 5-93972-379-9 .
18. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal Control*. NY, Plenum Press, 1987, 309 p. doi: 10.1007/978-1-4615-7551-1 . Original Russian text published in Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 432 p.

Received April 5, 2024
Revised May 3, 2024
Accepted May 6, 2024

Vladimir Germanovich Pimenov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru .

Andrey Borisovich Lozhnikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ablozhnikov@yandex.ru .

Cite this article as: V. G. Pimenov, A. B. Lozhnikov. Asymptotic expansion of the error of a numerical method for solving a superdiffusion equation with functional delay. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 138–151 .