ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА, ДЕШЕВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И ВОЗМУЩЕНИЕМ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

А. Р. Данилин, А. А. Шабуров

Рассматривается задача оптимального управления для линейной системы с постоянными коэффициентами с интегральным выпуклым критерием качества, содержащим два малых параметра (один — при интегральном слагаемом, другой — в начальных условиях), в классе кусочно–непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Такие задачи называются задачами с “дешевым” управлением. Показано, что предельной задачей будет задача с терминальным критерием качества. Утверждается, что если предельная задача фактически одномерна, а исходная — нет, то асимптотика решения может носить сложный характер. В частности, может не раскладываться в асимптотический ряд в смысле Пуанкаре ни по какой асимптотической последовательности рациональных функций от малого параметра и логарифмов от него.

Ключевые слова: оптимальное управление, дешевые управления, асимптотические разложения, малый параметр.

A. R. Danilin, A. A. Shaburov. Asymptotics of a solution to an optimal control problem with integral convex performance index, cheap control, and initial data perturbations.

We consider an optimal control problem in the class of piecewise continuous controls with smooth geometric constraints for a linear system with constant coefficients and an integral convex performance criterion containing two small parameters (the first of them multiplying the integral term, and the second in the initial data). Such problems are called cheap control problems. It is shown that a problem with a terminal performance index will be the limit one. It is established that if the limit problem is actually one-dimensional whereas the initial problem is not, then the asymptotics of the solution can be more complicated. In particular, the asymptotics of the solution may have no expansion in the Poincare sense in any asymptotic sequence of rational functions of the small parameter or its logarithms.

Keywords: optimal control, cheap control, asymptotic expansion, small parameter.

MSC: 49N05, 93C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-67-76

Введение

Рассматривается задача оптимального управления [1–3] для линейной системы с постоянными коэффициентами в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Критерий качества содержит терминальное слагаемое и интегральное слагаемое с малым множителем перед управлением. Начальные данные также имеют малое возмущение.

В работах, посвященных сингулярно возмущенным задачам управления, такие задачи называются задачами с “дешевым” управлением (см., например, обзоры [4–6]), поскольку характеризуются близостью к вырожденной задаче в смысле принципа максимума Понтрягина. Но, (см., например, статьи [7–9]) в опубликованных работах при анализе линейно-квадратичных задач с дешевым управлением строится асимптотика решения только при условии отсутствия ограничений на оптимальное управление.

При стремлении малого параметра к нулю исходная задача с “дешевым” управлением сводится к задаче оптимального управления с терминальным критерием качества. Отметим, что в предельной задаче оптимальное управление может иметь разрывы, в то время как у исходной задачи оптимальное управление непрерывно во всех точках. Асимптотика оптимального управления находится через построение асимптотики определяющего вектора. Для задач быстродействия в такой ситуации возможно появление сложных асимптотических разложений (см., например, [10; 11]). В статье [12] решение задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и "дешевым" управлением, вообще говоря, более регулярно зависит от малого параметра в случае разрывного управления предельной задачи, чем задача быстродействия в такой же ситуации.

В отличие от [12] в данной статье кроме дешевого управления рассматривается и возмущение начальных данных, что приводит к сложному виду асимптотики определяющего вектора (аналогичному виду асимптотики в [10; 11]).

1. Постановка задачи и определяющие соотношения

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управлений:

$$\dot{x}_{\varepsilon,\mu} = Ax_{\varepsilon,\mu} + Bu_{\varepsilon,\mu}, \quad t \in [0,T], \quad \|u_{\varepsilon,\mu}\| \leqslant 1, \quad x_{\varepsilon,\mu}(0) = x^0 + \mu f, \quad x^0 \neq 0 \neq f, \tag{1.1}$$

где $x_{\varepsilon,\mu} \in \mathbb{R}^n, u_{\varepsilon,\mu} \in \mathbb{R}^m$, A, B — постоянные матрицы соответствующей размерности с интегральным выпуклым критерием качества

$$J_{\varepsilon,\mu}(u) := \frac{1}{2}\|x_{\varepsilon,\mu}(T;u)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min; \tag{1.2}$$

здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном векторном пространстве, x^0 и f — известные векторы, $x_{\varepsilon,\mu}(\cdot;u)$ — решение системы (1.1) при заданном управлении $u(\cdot)$, а $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ малые параметры.

Предположение 1. *Пара матриц (A,B) вполне управляема.*

Как и в [12, разд. 1], оптимальное управление $u_{\varepsilon,\mu}(t)$ в задаче (1.1), (1.2) имеет вид

$$u_{\varepsilon,\mu}(T-t) = \frac{C^*(t)l_{\varepsilon,\mu}}{S_\varepsilon\left(\|C^*(t)l_{\varepsilon,\mu}\|\right)}, \quad S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon, & 0 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon, \\ \xi, & \xi > \varepsilon, \end{cases}$$

где $C(t) := e^{At}B$, а вектор $l_{\varepsilon,\mu}$ есть единственное решение уравнения

$$0 = -\nabla\varphi^*(-l) + e^{AT}(x^0 + \mu f) + \int\limits_0^T \frac{C(t)C^*(t)l}{S_\varepsilon\left(\|C^*(t)l\|\right)}dt. \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi(x) = \|x\|^2/2$, $\varphi^* = \varphi$ — функция, сопряженная к φ в смысле выпуклого анализа (см., например, [13, § 12]). Поэтому $\nabla\varphi^*(-l) = -l$.

Таким образом, уравнение (1.3) запишем как

$$-l_{\varepsilon,\mu} = e^{AT}(x^0 + \mu f) + \int\limits_0^T \frac{C(t)C^*(t)l_{\varepsilon,\mu}}{S_\varepsilon\left(\|C^*(t)l_{\varepsilon,\mu}\|\right)}dt. \tag{1.4}$$

Отметим, что при всех $l_{\varepsilon,\mu}$ и $t \in [0,T]$

$$\left\|\frac{C^*(t)l_{\varepsilon,\mu}}{S_\varepsilon\left(\|C^*(t)l_{\varepsilon,\mu}\|\right)}\right\| \leqslant 1.$$

О п р е д е л е н и е 1. Вектор $l_{\varepsilon,\mu}$ — решение уравнения (1.4) — назовем *определяющим вектором в задаче* (1.1), (1.2).

Наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим следующую задачу оптимального терминального управления:

$$\dot{x_0} = Ax_0 + Bu_0, \quad t \in [0,T], \quad \|u_0\| \leqslant 1, \quad x_0(0) = x^0, \quad J_0(u) := \varphi(x_0(T;u)) \to \min. \tag{1.5}$$

Здесь φ и x^0 те же, что и в задаче (1.1), (1.2).

Отметим, что

$$x_{\varepsilon,\mu}(T;u) = x_0(T;u) + \mu e^{AT} f \;=:\; x_0(T;u) + \mu\widetilde{f}. \tag{1.6}$$

В силу принципа максимума (см., например, [14, п. 6.1.3, теорема]) l_0 — значение сопряженной переменной — в момент времени T удовлетворяет равенству

$$-l_0 = \nabla\varphi(x_0(T;u_0^{\mathrm{opt}})) = x_0(T;u_0^{\mathrm{opt}}), \tag{1.7}$$

где u_0^{opt} — оптимальное управление в задаче (1.5). При этом если $l_0 \neq 0$, то единственное оптимальное управление u_0^{opt} задается соотношением

$$u_0^{\mathrm{opt}}(T-t) = \frac{C^*(t)l_0}{\|C^*(t)l_0\|},$$

а вектор l_0 согласно (1.7) есть единственное решение уравнения

$$-l_0 = e^{AT}x_0 + \int\limits_0^T \frac{C(t)C^*(t)l_0}{\|C^*(t)l_0\|}dt.$$

Отметим, что $l_0 = 0$ тогда и только тогда, когда в задаче (1.5) ограничения на управление не по существу. В этом случае оптимальное управление, вообще говоря, не единственно.

О п р е д е л е н и е 2. В случае $l_0 \neq 0$ вектор l_0 естественно назвать *определяющим вектором* в задаче (1.5).

Теорема 1. *Пусть $l_{\varepsilon,\mu}$ — определяющий вектор в задаче* (1.1), (1.2)*, $0 \neq l_0$ — определяющий вектор в задаче* (1.5)*, $J_{\varepsilon,\mu} := J_{\varepsilon,\mu}(u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}})$, а $J_0 := J_0(u_0^{\mathrm{opt}})$.*

Тогда $J_{\varepsilon,\mu} \to J_0$ и $l_{\varepsilon,\mu} \to l_0$ при $\varepsilon + \mu \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения $u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}}$ и u_0^{opt} справедливо неравенство

$$J_0 = \varphi(x_0(T;u_0^{\mathrm{opt}})) \leqslant \varphi(x_0(T;u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}})) \overset{(1.2)}{\leqslant} J_{\varepsilon,\mu} + \Big(\varphi(x_0(T;u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}})) - \varphi(x_{\varepsilon,\mu}(T;u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}}))\Big)$$
$$\leqslant J_{\varepsilon,\mu}(u_0^{\mathrm{opt}}) + \Big(\varphi(x_0(T;u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}})) - \varphi(x_{\varepsilon,\mu}(T;u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}}))\Big)$$
$$\overset{(1.2),(1.6)}{\leqslant} J_0(u_0^{\mathrm{opt}}) + \Big(\varphi(x_0(T;u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}})) - \varphi(x_{\varepsilon,\mu}(T;u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}}))\Big) + \Big(\varphi(x_{\varepsilon,\mu}(T;u_0^{\mathrm{opt}})) - \varphi(x_0(T;u_0^{\mathrm{opt}}))\Big) + \frac{\varepsilon T}{2}.$$

Таким образом, верно неравенство

$$J_0 \leqslant J_{\varepsilon,\mu} + \gamma_{\varepsilon,\mu} \leqslant J_0 + \gamma_{\varepsilon,\mu} + \delta_{\varepsilon,\mu} + \frac{\varepsilon T}{2}, \tag{1.8}$$

где

$$\gamma_{\varepsilon,\mu} := \Big(\varphi(x_0(T;u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}})) - \varphi(x_{\varepsilon,\mu}(T;u_{\varepsilon,\mu}^{\mathrm{opt}}))\Big), \quad \delta_{\varepsilon,\mu} := \Big(\varphi(x_{\varepsilon,\mu}(T;u_0^{\mathrm{opt}})) - \varphi(x_0(T;u_0^{\mathrm{opt}}))\Big).$$

Пусть Ξ_μ — множество достижимости системы (1.1) из $x^0 + \mu f$ в момент времени T. Поскольку эти множества — компакты и $\Xi_\mu \subset \Xi_0 + B[0, \mu\|\widetilde{f}\|]$, то при условии $\mu \in [0,1]$ все точки

$x_0(T;u^{\rm opt}_{\varepsilon,\mu})$, $x_{\varepsilon,\mu}(T;\mu,u^{\rm opt}_{\varepsilon,\mu})$, $x_{\varepsilon,\mu}(T;\mu,u^{\rm opt}_0)$ и $x_0(T;u^{\rm opt}_0)$ лежат в компакте $\Xi_0+B[0,\|\widetilde{f}\|]$. Здесь $B[0,r]$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке 0.

Но на этом компакте функция φ липшицева, т. е. существует такая константа $L>0$, что при всех $x_1,x_2\in\Xi_0+B[0,\|\widetilde{f}\|]$ справедливо неравенство $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant L\|x_1-x_2\|$. Отсюда в силу (1.6) следует $|\gamma_{\varepsilon,\mu}|\leqslant L\mu\|\widetilde{f}\|$ и $|\delta_{\varepsilon,\mu}|\leqslant L\mu\|\widetilde{f}\|$. Поэтому, переходя в (1.8) к пределу при $\varepsilon+\mu\to 0$, получим

$$J_{\varepsilon,\mu}\to J_0 \ \text{ при } \ \varepsilon+\mu\to 0. \tag{1.9}$$

Пусть теперь $\widetilde{x}$ — произвольная предельная точка $x_{\varepsilon,\mu}(T;u^{\rm opt}_{\varepsilon,\mu})$ при $\varepsilon+\mu\to 0$, т. е.

$$x_k:=x_{\varepsilon_k,\mu_k}(T;u^{\rm opt}_{\varepsilon_k,\mu_k})\to\widetilde{x}$$

для некоторых последовательностей $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\mu_k\}$ таких, что $\varepsilon_k\to 0$ и $\mu_k\to 0$.

Тогда $x_k=\widetilde{x}_k+\mu_k\widetilde{f}$, где $\widetilde{x}_k\in\Xi_0$. Поэтому $\widetilde{x}_k=x_k-\mu_k\widetilde{f}\to\widetilde{x}$ и $\widetilde{x}\in\Xi_0$ в силу компактности Ξ_0.

С учетом (1.2) и непрерывности φ имеем $J_{\varepsilon_k,\mu_k}\to\varphi(\widetilde{x})$, а согласно (1.9) справедливо равенство $\varphi(\widetilde{x})=J_0=\varphi(x_0(T;u^{\rm opt}_0))$; т. е. $\widetilde{x}$ — точка минимума функции φ на компакте Ξ_0. Поскольку φ строго выпуклая, а компакт Ξ_0 выпуклый, то такая точка единственная. Поэтому $\widetilde{x}=x_0(T;u^{\rm opt}_0)$ и, тем самым,

$$x_{\varepsilon,\mu}(T;u^{\rm opt}_{\varepsilon,\mu})\to x_0(T;u^{\rm opt}_0) \ \text{ при } \ \varepsilon+\mu\to 0.$$

Теперь в силу непрерывности $\nabla\varphi$ получим итоговое соотношение

$$l_{\varepsilon,\mu}=-\nabla\varphi(x_{\varepsilon,\mu}(T;u^{\rm opt}_{\varepsilon,\mu}))\to-\nabla\varphi(x_0(T;u^{\rm opt}_0))=l_0 \ \text{ при } \ \varepsilon+\mu\to 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что доказанная теорема справедлива для любой строго выпуклой и дифференцируемой на $\mathbb{R}^n$ функции φ.

Если $\|C^*(t_0)l_0\|=0$ при $t_0\in(0,T)$, то оптимальное управление в предельной задаче (1.5) терпит разрыв в точке t_0, в то время как оптимальное управление в задаче (1.1), (1.2) непрерывно при всех $t\in[0,T]$. Такая ситуация для задачи быстродействия при возмущении начальных данных приводит к сложной асимптотике определяющего вектора (см. [10; 11]).

Покажем, что и для рассматриваемой задачи (1.1), (1.2) ситуация аналогична, т. е. определяющий вектор $l_{\varepsilon,\mu}$ даже при $\mu=\varepsilon$ не раскладывается в асимптотический ряд в смысле Пуанкаре ни по какой асимптотической последовательности рациональных функций от малого параметра ε и логарифмов от него.

Следующая часть работы посвящена доказательству этого факта.

2. Пример задачи (1.1), (1.2) со сложной асимптотикой определяющего вектора

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) при следующих условиях:

$$n=3,\quad T=3,\quad \mu=\varepsilon,$$
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad x^0=\begin{pmatrix}-9/2\\0\\0\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

В этом случае

$$
e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C(t) := e^{At}B = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
C^*(t)l = C^*(t)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tl_1 + l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \quad C(t)C^*(t)l = \begin{pmatrix} t(tl_1 + l_2) \\ tl_1 + l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}. \tag{2.2}
$$

Определяющим вектором в предельной задаче в рассматриваемом случае является вектор l_0: $l_{1,0} = 1$, $l_{2,0} = -1$, $l_{3,0} = 0$, $\|C^*(t)l_0\| = |t-1|$ и $\|C^*(1)l_0\| = 0$.

Уравнение для определяющего вектора l_ε в силу (2.2) принимает вид

$$
\begin{cases}
-l_{1,\varepsilon} = x_1^0 + \displaystyle\int_0^3 \frac{t(tl_{1,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon})}{S_\varepsilon\Big(\sqrt{(tl_{1,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon})^2 + l_{3,\varepsilon}^2}\Big)}dt, \\
-l_{2,\varepsilon} = \displaystyle\int_0^3 \frac{tl_{1,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon}}{S_\varepsilon\Big(\sqrt{(tl_{1,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon})^2 + l_{3,\varepsilon}^2}\Big)}dt, \\
-l_{3,\varepsilon} = \varepsilon + \displaystyle\int_0^3 \frac{l_{3,\varepsilon}}{S_\varepsilon\Big(\sqrt{(tl_{1,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon})^2 + l_{3,\varepsilon}^2}\Big)}dt.
\end{cases} \tag{2.3}
$$

По теореме 1 $l_{1,\varepsilon} \to 1$, $l_{2,\varepsilon} \to -1$, а $l_{3,\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Введем обозначения:

$$
l_{1,\varepsilon} := 1 + \lambda_\varepsilon, \quad \lambda_\varepsilon \to 0, \quad \beta_\varepsilon := (l_{2,\varepsilon}/l_{1,\varepsilon}) \to -1, \quad \beta_\varepsilon := -1 + \gamma_\varepsilon, \quad \gamma_\varepsilon \to 0,
$$
$$
\rho_\varepsilon := (l_{3,\varepsilon}/l_{1,\varepsilon}) \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0. \tag{2.4}
$$

В дальнейшем для сокращения записи индекс ε будем часто опускать. Тогда $(tl_1+l_2)^2+l_3^2 = l_1^2((t+\beta)^2+\rho^2)$.

Поэтому, сделав замену переменной $\tau := t + \beta$ в интегралах из (2.3), получим

$$
-l_1\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + l_1 \int_\beta^{3+\beta} \begin{pmatrix} (\tau-\beta)\tau \\ \tau \\ \rho \end{pmatrix} \frac{d\tau}{S_\varepsilon\Big(l_1\sqrt{\tau^2+\rho^2}\Big)} \tag{2.5}
$$

(отметим, что $l_{1,\varepsilon} > 0$ при малых $\varepsilon > 0$).

Найдем точки смены вида управления в (2.5) из уравнения $l_1\sqrt{\tau^2+\rho^2} = \varepsilon$:

$$
\tau_{1,2} = \mp\frac{\delta}{l_1}, \quad \text{где} \quad \delta := \sqrt{\varepsilon^2 - l_1^2\rho^2}, \quad \varepsilon^2 = \delta^2 + l_1^2\rho^2. \tag{2.6}
$$

Отсюда

$$
0 \leqslant l_1|\rho| \leqslant \varepsilon, \quad \delta = O(\varepsilon), \quad \rho = O(\varepsilon) \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.
$$

С учетом вида управления при различных τ система (2.5) примет вид

$$
\begin{cases}
-l_1 = x_1^0 + \displaystyle\int_\beta^{\tau_1} \frac{(\tau^2-\beta\tau)d\tau}{\sqrt{\tau^2+\rho^2}} + l_1\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(\tau^2-\beta\tau)d\tau}{\varepsilon} + \int_{\tau_2}^{3+\beta} \frac{(\tau^2-\beta\tau)d\tau}{\sqrt{\tau^2+\rho^2}}, \\
-\beta l_1 = \displaystyle\int_\beta^{\tau_1} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{\tau^2+\rho^2}} + l_1\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\tau d\tau}{\varepsilon} + \int_{\tau_2}^{3+\beta} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{\tau^2+\rho^2}}, \\
-\rho l_1 = \varepsilon + \rho\displaystyle\int_\beta^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+\rho^2}} + l_1\rho\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\varepsilon} + \rho\int_{\tau_2}^{3+\beta} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+\rho^2}}.
\end{cases} \tag{2.7}
$$

Все интегралы в (2.7) — табличные, поэтому эту систему можно записать как

$$
\begin{cases}
-l_1 = x_1^0 + (I_2(\beta,\tau_1) + I_2(\tau_2,\beta+3)) - \beta(I_1(\beta,\tau_1) + I_1(\tau_2,\beta+3)) \\
\qquad + \dfrac{l_1}{3\varepsilon}(\tau_2^3 - \tau_1^3) - \dfrac{\beta l_1}{2\varepsilon}(\tau_2^2 - \tau_1^2), \\
-\beta l_1 = (I_1(\beta,\tau_1) + I_1(\tau_2,\beta+3)) + \dfrac{l_1}{2\varepsilon}(\tau_2^2 - \tau_1^2), \\
\quad -\rho l_1 = \varepsilon + \rho(I_0(\beta,\tau_1) + I_0(\tau_2,\beta+3)) + \dfrac{\rho l_1}{\varepsilon}(\tau_2 - \tau_1).
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

Здесь

$$
I_k(a,b) := \int\limits_a^b \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{\tau^2+\rho^2}}, \quad \text{и поэтому} \quad I_0(a,b) = \ln|\tau + \sqrt{\tau^2+\rho^2}|\Big|_a^b,
$$

$$
I_1(a,b) = \sqrt{\tau^2+\rho^2}\Big|_a^b, \quad I_2(a,b) = \frac{1}{2}\tau\sqrt{\tau^2+\rho^2}\Big|_a^b - \frac{1}{2}\rho^2 I_0(a,b).
$$

Отметим, что в силу (2.6)

$$
\sqrt{\tau_{1,2}^2+\rho^2} = \frac{\varepsilon}{l_1}, \quad \tau_{1,2} + \sqrt{\tau_{1,2}^2+\rho^2} = \frac{\varepsilon \mp \delta}{l_1}, \quad \tau_2 - \tau_1 = \frac{2\delta}{l_1}, \quad \tau_2^2 - \tau_1^2 = 0, \quad \tau_2^3 - \tau_1^3 = \frac{2\delta^3}{l_1^3}. \tag{2.9}
$$

При этом если $\tau_{*,\varepsilon} = d + g_\varepsilon$, $d \neq 0$ и $g_\varepsilon = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$
\sqrt{\tau_*^2+\rho^2} = |\tau_*| + \frac{\rho^2}{2|\tau_*|} + F_{4,1}(\rho,g), \quad \tau_*\sqrt{\tau_*^2+\rho^2} = \tau_*|\tau_*| + \frac{\rho^2\tau_*}{2|\tau_*|} + F_{4,2}(\rho,g),
$$

если, дополнительно, $d > 0$, то

$$
\ln(\tau_* + \sqrt{\tau_*^2+\rho^2}) = \ln(2\tau_*) + \frac{\rho^2}{4\tau_*^3} + F_{4,3}(\rho,g).
$$

Здесь через $F_{k,i}$ обозначены непрерывные функции малых аргументов, имеющие степенное асимптотическое разложение по этим аргументам, которое начинается со слагаемых порядка k.

Таким образом, из (2.9) с учетом (2.4) выводим:

$$
I_0(\beta,\tau_1) + I_0(\tau_2,\beta+3) = \ln\left|\frac{\Big(\beta+3+\sqrt{(\beta+3)^2+\rho^2}\Big)(\varepsilon-\delta)}{(\beta+\sqrt{\beta^2+\rho^2})(\varepsilon+\delta)}\right|
$$

$$
= \ln\left|\frac{\Big(\beta+3+\sqrt{(\beta+3)^2+\rho^2}\Big)(\sqrt{\beta^2+\rho^2}-\beta)l_1}{(\varepsilon+\delta)^2}\right| = -2\ln(\varepsilon+\delta) + \ln(8) + \ln(l_1^2) + F_{2,1}(\lambda,\gamma,\rho);
$$

$$
I_1(\beta,\tau_1) + I_1(\tau_2,\beta+3) = \frac{\varepsilon}{l_1} - \sqrt{\beta^2+\rho^2} - \frac{\varepsilon}{l_1} + \sqrt{(\beta+3)^2+\rho^2} = 3 + \beta - |\beta| + F_{2,2}(\lambda,\gamma,\rho);
$$

$$
I_2(\beta,\tau_1) + I_2(\tau_2,\beta+3) = -\frac{\delta\varepsilon}{l_1^2} + \frac{(3+\beta)^2 - \beta|\beta|}{2} + \rho^2\ln(\varepsilon+\delta) + F_{2,3}(\lambda,\gamma,\rho).
$$

Переходя к неизвестным λ,γ,ρ в (2.8), получим систему уравнений

$$
\begin{cases}
-\lambda = \dfrac{2\delta^3}{3\varepsilon(1+\lambda)^2} - \dfrac{\delta\varepsilon}{(1+\lambda)^2} + 2\gamma + \rho^2\ln(\varepsilon+\delta) + F_{2,4}(\lambda,\gamma,\rho), \\
\lambda - \gamma = 2\gamma + F_{2,5}(\lambda,\gamma,\rho), \\
-\rho = \varepsilon + \rho\ln(8) - 2\rho\ln(\varepsilon+\delta) + \dfrac{2\rho\delta}{\varepsilon} + F_{2,6}(\lambda,\gamma,\rho).
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

Будем искать асимптотическое разложение λ_ε, γ_ε и ρ_ε в виде

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k(\varepsilon), \quad \gamma_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \gamma_k(\varepsilon), \quad \rho_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \rho_k(\varepsilon), \tag{2.11}$$

где $\lambda_k(\varepsilon) = O^*(1)$, $\gamma_k(\varepsilon) = O^*(1)$, $\rho_k(\varepsilon) = O^*(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Здесь запись $\psi(\varepsilon) = O^*(1)$ означает, что для любого $\alpha > 0 : \varepsilon^\alpha \psi(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (см., например, [15, разд. 3]).

Системой первого приближения для (2.10) (λ_1, γ_1 и ρ_1) будет система

$$\begin{cases} \varepsilon\lambda_1 + 2\varepsilon\gamma_1 = 0, \\ \varepsilon\lambda_1 - 3\varepsilon\gamma_1 = 0, \\ \varepsilon\rho_1\Big(\ln(8e) - 2\ln(\varepsilon+\delta) + \dfrac{2\delta}{\varepsilon}\Big) = -\varepsilon. \end{cases} \tag{2.12}$$

Из первых двух уравнений системы (2.12) находим $\lambda_1 = 0 = \gamma_1$.

Последнее уравнение в (2.12) представим как

$$\rho_1\Big(\ln(8e) - 2\ln(\varepsilon+\delta) + \frac{2\delta}{\varepsilon}\Big) + 1 = 0.$$

Будем искать ρ_1 в виде $-W(\varepsilon)$. Тогда из последнего уравнения в силу (2.6) получим

$$G(W,\varepsilon) = W\left(\ln(8e) - 2\ln(\varepsilon) - 2\ln(1+\sqrt{1-W^2}) + 2\sqrt{1-W^2}\right) - 1 = 0, \quad W \in [-1;1]. \tag{2.13}$$

Покажем, что при всех малых $\varepsilon > 0$ уравнение (2.13) разрешимо единственным образом на отрезке $[0;1]$.

Действительно, функция $G(\cdot,\varepsilon)$ непрерывна на $[0;1]$,

$$G(0,\varepsilon) = -1 < 0, \quad G(1,\varepsilon) = \ln(8e) - 2\ln(\varepsilon) - 1 > 0$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, поэтому есть такое $W(\varepsilon)$, что $G(W(\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0$. Поскольку

$$\frac{\partial G}{\partial W} = \ln(8e) - 2\ln(\varepsilon) - 2\ln(1+\sqrt{1-W^2}) + 2\sqrt{1-W^2}$$
$$+ \frac{2W^2}{\sqrt{1-W^2}(1+\sqrt{1-W^2})} - 2\frac{W^2}{\sqrt{1-W^2}} > 0$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то это решение единственно. Таким образом, $\rho_1 = -W(\varepsilon)$ и $W(\varepsilon)$ — не константа. Отметим, что в силу (2.13) величина $W(\varepsilon)\ln(\varepsilon)$ ограничена при $\varepsilon \to 0$, тем самым $W(\varepsilon) = o(1)$ и $\varepsilon\rho_1 = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Найдем систему второго приближения. Поскольку

$$\delta = \sqrt{\varepsilon^2 - (-\varepsilon W(\varepsilon) + \varepsilon^2\rho_2)^2} = \varepsilon V(\varepsilon) + \varepsilon^2\rho_2\frac{W}{V} + \dots, \quad V := \sqrt{1-W^2},$$

$$\ln(\varepsilon+\delta) = \ln\varepsilon + \ln(1+V) + \varepsilon\rho_2\frac{W}{V(1+V)} + \dots,$$

то система второго приближения (после сокращения на ε^2) имеет вид (отметим, что она, как и системы следующих приближений, линейна относительно своих неизвестных с одной и той же матрицей системы)

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2\gamma_2 = P_1(W,V), \\ \lambda_2 - 3\gamma_2 = P_2(W,V), \\ \rho_2\left(\ln(8e) - 2\ln(\varepsilon) - 2\ln(1+V) + 2V\right) = P_3(W,V), \end{cases}$$

где $P_i(W,V)$ $(i-1,2,3)$ — известные рациональные функции своих аргументов.

Итак, уже для вторых приближений $\lambda_2(\varepsilon)$, $\gamma_2(\varepsilon)$ и $\rho_2(\varepsilon)$ не являются константами.

Нахождение полного асимптотического разложения λ_ε, γ_ε и ρ_ε и его обоснования делается стандартно (см., например, [15, разд. 5]).

Теорема 2. *Определяющий вектор* l_ε *в задаче* (1.1), (1.2) *при условии* (2.1) *не раскладывается в асимптотический ряд в смысле Пуанкаре по степеням* ε *при* $\varepsilon \to 0$. *Его асимптотическое разложение есть разложение в смысле Эрдейи относительно асимптотической последовательности* $\{\varepsilon^k\}$, *порождаемое рядами* (2.11). $\square$

Заключение

В задаче из [12] и возмущенная, и предельные задачи были фактически одной размерности, что привело к регулярному виду асимптотического разложения определяющего вектора.

В настоящей же работе размерности исходной и предельной задач, по существу, разные, что и отразилось на сложном виде асимптотического разложения определяющего вектора.

Отметим, что если обозначить $\ln^{-1}(1/\varepsilon)$ через $\nu \to +0$, то уравнение (2.13) имеет вид

$$0 = 2W - \nu + \nu W \sum_{k=0}^{\infty} w_k W^k.$$

Исходя из этого, применим асимптотический аналог теоремы о функции, заданной неявно (см., например, [16, теорема 1]); соответственно, W как функция от ν раскладывается при $\nu \to 0$ ($\varepsilon \to 0$) в степенной ряд

$$W \overset{as}{=} \frac{\nu}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \nu^k = \frac{\ln^{-1}(1/\varepsilon)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \ln^{-k}(1/\varepsilon)$$

и не представляет собой рациональную функцию от $\ln(1/\varepsilon)$.

Таким образом, определяющий вектор $l_{\varepsilon,\mu}$ ($\mu = \varepsilon$) при $\varepsilon \to +0$ не раскладывается в асимптотический ряд в смысле Пуанкаре ни по какой асимптотической последовательности рациональных функций от малого параметра ε и логарифмов от него.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. №. 1. С. 3–51.
5. **Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.** Singular perturbation and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // Internat. J. of Information and Systems Sciences. 2014. Vol. 9, no. 1. P. 1–36.
6. **Курина Г.А., Калашникова М.А.** Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автоматика и телемеханика. 2022. № 11. С. 3–61. doi: 10.31857/S0005231022110010
7. **Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.** Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи Коши, возникающей в теории оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 4. С. 601–612.
8. **Hoai N.T.** Asymptotic solution of a singularly perturbed linear–quadratic problem in critical case with cheap control // J. Optim. Theory Appl. 2017. Vol. 175, no. 2. P. 324–340. doi: 10.1007/s10957-017-1156-6
9. **Калашникова М.А., Курина Г.А.** Прямая схема асимптотического решения линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, №. 1. С. 83–102. doi: 10.1134/S0374064119010096
10. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** Асимптотическое поведение решения задачи быстродействия для линейной системы при возмущении начальных данных // Докл. РАН. 1996. Т. 350, № 2. С. 155–157.

11. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и приклад. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
12. **Данилин А.Р., Шабуров А.А.** Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешевым управлением // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 3. С. 5–13. doi: 10.33048/SIBJIM.2021.25.301
13. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 471 с.
14. **Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1989. 204 с.
15. **Данилин А.Р., Коврижных О.О** Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи быстродействия с двумя малыми параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Vol. 25, № 2. P. 88–101. doi:10.21538/0134-4889-2019-25-2-88-101
16. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика решения одной задачи быстродействия с неограниченным целевым множеством для линейной системы в критическом случае // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Vol. 28, № 1. С. 58–73. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73

Поступила 4.01.2023
После доработки 3.02.2023
Принята к публикации 6.02.2023

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Шабуров Александр Александрович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: alexandershaburov@mail.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* NY: London: Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1962. 360 p. doi:10.1002/zamm.19630431023 Original Russian text was published in Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov, Moscow, Phys. Math. Liter. Publ., 1961, 391 p.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem: Lineinye sistemy* [The Theory of the Control of Motion: Linear Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 pp.
3. Lee E.B., Markus L. *Foundations of Optimal Control Theory.* NY; London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1967, 588 p. Translated to Russian under the title Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya, Moscow, Nauka publ., 1972, 576 pp.
4. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control,* 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. doi:10.1134/S0005117906010012
5. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y. Singular perturbation and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012. *Internat. J. of Information and Systems Sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.
6. Kurina G.A., Kalashnikova M.A. Singularly perturbed problems with quick variables of different paces. *Avtomatika i Telemekhanika,* 2022, no. 11, pp. 3–61 (in Russian). doi:10.31857/S0005231022110010
7. Glizer V.Ya., Dmitriev M.G. Asymptotics for the solution of a singularly perturbed Cauchy problem arising in the theory of optimal control. *Differ. Uravn.,* 1978, vol. 14, no. 4, pp. 601–612 (in Russian).
8. Hoai N.T. Asymptotic solution of a singularly perturbed linear–quadratic problem in critical case with cheap control. *J. Optim Theory Appl.*, 2017, vol. 175, no. 2, pp. 324–340. doi: 10.1007/s10957-017-1156-6
9. Kalashnikova M.A., Kurina G.A. Direct scheme for the asymptotic solution of linear-quadratic problems with cheap controls of different costs. *Differ. Equat.,* 2019, vol. 55, no. 1, pp. 84–104. doi: 10.1134/S0012266119010099

10. Danilin A.R., Il'in A.M. The asymptotical behavior of the solution to the time-optimal problem for a linear system under perturbation of initial data. *Dokl. Math.,* 1996, vol. 54, no. 2, pp. 673–675.
11. Danilin A.R., Il'in A.M. On the structure of the solution of a perturbed time-optimal control problem. *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 4, no. 3, pp. 905–926 (in Russian).
12. Danilin A.R., Shaburov A.A. Asymptotic expansion of an optimal control problem with convex integral performance index and cheap control. *Sib. J. Industr. Math.*, 2022, vol. 25, no. 3, pp. 5–13 (in Russian). doi:10.33048/SIBJIM.2021.25.301
13. Rockafellar R.T. *Convex Analysis,* Princeton, Princeton Univ. Press., 1970, 451 p. Translated to Russian under the title Vypuklyi analiz, Moscow, Mir Publ., 1973, 471 p.
14. Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Kratkii kurs teorii ekstremal'nykh zadach* [Short course of extremal problems theory]. Moscow, Moscow State Univ. Publ., 1989. 204 p.
15. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Asymptotics of the solution to a singularly perturbed timeoptimal control problem with two small parameters. *Trudy Inst. Math. Mech. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 88–101 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-88-101
16. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Asymptotics of a solution to a time-optimal control problem with an unbounded target set in the critical case. *Trudy Inst. Math. Mech. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 58–73 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73

Received January 4, 2023
Revised February 3, 2023
Accepted February 6, 2023

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Aleksandr Aleksandrovich Shaburov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: alexandershaburov@mail.ru .

Cite this article as: A. R. Danilin, A. A. Shaburov. Asymptotics of a solution to an optimal control problem with integral convex performance index, cheap control, and initial data perturbations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 67–76 .