

УДК 517.977

## О СИНТЕЗЕ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УСИЛЕННОГО УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМ

Е. К. Костоусова

Рассматривается задача уклонения для линейных многошаговых систем с двумя управлениями, которые могут иметь разные цели, причем цель одного из них — избежать, вне зависимости от действий другого, попадания траектории на заданное терминальное множество в заданный конечный момент времени и, более того, избежать попадания на последовательность множеств, заданных в предыдущие моменты. Называем ее задачей усиленного уклонения. Ее частным случаем является задача уклонения траектории от терминального множества во все моменты времени. Приводится способ синтеза управлений на основе построения трубок разрешимости. Однако точно построить последние обычно достаточно трудно. Далее предполагается, что терминальное и промежуточные множества являются параллелепипедами, а оба управления стеснены параллелотопозначными ограничениями. Предлагается и обосновывается быстрый метод синтеза управлений на основе построения пары связанных полиэдральных трубок с параллелепипедозначными сечениями. Предложенные процедуры применимы для случаев с возможным вырождением или пустотой сечений в некоторые моменты времени. Сечения трубок и значения управлений находятся по явным формулам. Предложено несколько вариантов формул для синтеза управлений. Приведены примеры, иллюстрирующие работоспособность представленного метода.

Ключевые слова: системы с неопределенностью, задача уклонения, синтез управлений, полиэдральные методы, параллелепипеды.

**E. K. Kostousova. On a control synthesis in an enhanced evasion problem for linear discrete-time systems.**

The evasion problem is considered for linear discrete-time systems with two controls that may have different aims. The aim of one of them is to exclude, regardless of the other, the trajectory hitting a given terminal set at a given final instant, and moreover to exclude the trajectory hitting a sequence of sets given at previous instants. We call it an enhanced evasion problem. Its special case is the problem of trajectory evasion from the terminal set at all instants. A method of control synthesis based on the construction of solvability tubes is presented. However, it is usually quite difficult to accurately construct them. Then it is assumed that the terminal and intermediate sets are parallelepipeds and both controls are bounded by parallelotope-valued constraints. A fast method of control synthesis based on the construction of a pair of polyhedral tubes with parallelepiped-valued cross-sections is proposed and justified. The proposed procedures are applicable for cases with possible degeneration or emptiness of the cross-sections at some instants. The cross-sections of the tubes and the control values are found from explicit formulas. Several variants of the control synthesis formula are given. Examples are given to illustrate the presented method.

Keywords: systems with uncertainties, evasion problem, control synthesis, polyhedral methods, parallelepipeds.

MSC: 93C41, 93C55, 93B50, 93B40, 52B12

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-111-126

### 1. Введение

Рассматриваются линейные многошаговые системы с заданным целевым терминальным множеством и с двумя управлениями, которые могут иметь разные цели — привести траекторию на это множество или уклониться от него. Соответственно подобно [1] можно поставить две задачи: сближения и уклонения. Работа посвящена решению задачи уклонения, где цель одного из управлений — гарантированно избежать, вне зависимости от реализаций другого, попадания траектории на заданное терминальное множество в заданный конечный момент времени и, более того, предотвратить попадание на последовательность множеств, заданных

в предыдущие моменты. Назовем ее задачей усиленного уклонения — в отличие от задачи терминального уклонения, в постановке которой промежуточных множеств нет.

Известны подходы к решению обеих вышеупомянутых задач, базирующиеся на построении трубок разрешимости [1–3]. Их точное построение, как правило, затруднительно, поэтому разработано значительное количество численных методов, в том числе предложены итеративные методы, методы множеств уровня, понятные процедуры и много других (см., например, [1–4]; здесь и ниже приведено только несколько ссылок из большого числа работ; см. также библиографию в них). С точки зрения представления множеств можно выделить, в частности, методы, основанные на приближении множеств многогранниками [5–8]. Они могут давать достаточно точные аппроксимации, но за счет большой трудоемкости. В задачах, связанных с построением трубок траекторий, активно разрабатываются также эллипсоидальные и полиэдральные методы, основанные на построении эллипсоидальных [2; 3; 9–12] и полиэдральных (параллелепипедо- и параллелотопо- значных) [13] трубок, нахождение которых значительно менее трудоемко.

Так, для решения задач терминального сближения в многошаговых системах разработаны и эллипсоидальные [12], и полиэдральные [13; 14] схемы. Предложенная автором полиэдральная техника решения задач сближения (см. ссылку [11]<sup>1</sup> из статьи [6]) была использована в [6; 15] для построения управлений автопилотом реактивного самолета в режиме реального времени для взлета при непредсказуемых ветровых помехах, развита далее для решения задачи терминального уклонения в линейных дифференциальных системах и применена для формирования опасных помех [16].

Статья посвящена решению задачи усиленного уклонения для многошаговых систем. Ее частным случаем является задача уклонения траектории от терминального множества во все моменты времени. Отметим, что в [17] были описаны и исследованы две полиэдральные схемы решения задачи терминального уклонения. Но они не могут гарантировать уклонение траектории от терминального множества в промежуточные моменты; об этом свидетельствуют также результаты численного моделирования. Здесь уместно упомянуть исследования [18] об условиях совпадения трубок разрешимости в дифференциальных игровых задачах сближения “в момент” и “к моменту”. Заметим также, что в [13; 14; 17] терминальное множество предполагалось невырожденным параллелотопом и использовались параллелотопозначные трубки, где допускались только трубки с невырожденными сечениями. Теперь невырожденность терминального множества не предполагается. Ниже путем перехода от параллелотопозначных трубок к параллелепипедозначным одна из упомянутых схем из [17] развита далее для решения более сложной задачи. При этом описано более широкое семейство полиэдральных трубок.

В статье сначала указывается способ синтеза управлений на основе построения трубок разрешимости или их дополнений; последние по аналогии с [6] можно назвать “отталкивающими” (в ориг.: repulsive). Далее предполагается, что терминальное и промежуточные множества являются параллелепипедами, а оба управления стеснены параллелотопозначными ограничениями. Предлагается и обосновывается метод синтеза управлений на базе построения пары связанных друг с другом полиэдральных трубок с параллелепипедозначными сечениями. При этом из рассмотрения не исключаются случаи, когда в некоторые моменты времени сечения могут оказаться вырожденными или даже пустыми. Сечения трубок и значения управлений находятся по явным формулам. Предложено несколько вариантов формул для синтеза управлений. Приведены примеры, иллюстрирующие работоспособность представленного метода.

Ниже используем следующие обозначения:  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^{n \times m}$  — линейные пространства вещественных  $n$ -векторов и  $n \times m$ -матриц соответственно;  $\top$  — знак транспонирования;  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  — кубическая норма вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ;  $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$  — единичный орт вдоль оси  $0x_i$  (единица стоит на  $i$ -м месте);  $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ ;  $A = \{a_i^j\} = \{a^j\}$  — матрица с элементами  $a_i^j$  и со столбцами  $a^j$  (верхним индексом нумеруем столбцы, нижним —

<sup>1</sup>Здесь и далее во избежание путаницы ссылки, приведенные в источниках, даны курсивом.

компоненты векторов);  $0$  — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности;  $I$  — единичная матрица;  $\text{Abs } A$  — матрица абсолютных величин элементов матрицы  $A = \{a_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ :  $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$ ;  $\text{diag } \pi$  — диагональная матрица с компонентами  $\pi_i$  вектора  $\pi$  на диагонали;  $\det A$  — определитель матрицы  $A$ ;  $\text{int } \mathcal{X}$  — совокупность внутренних точек множества  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ;  $\text{sign } z$  — функция знака числа (равна  $-1, 0, 1$  соответственно при  $z < 0, z = 0, z > 0$ ). Для краткости используем обозначения типа  $k = 1, \dots, n$  вместо  $k = 1, 2, \dots, n$ .

## 2. Постановка задачи

Рассматриваем линейные многошаговые управляемые системы

$$\begin{aligned} x[k] &= A[k]x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k], \quad k = 1, \dots, N, \\ u[k] &\in \mathcal{R}[k], \quad v[k] \in \mathcal{Q}[k], \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния, с целевым множеством  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  и заданной последовательностью множеств  $\mathcal{M}[k] \subseteq \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, N-1$ ; для дальнейшего удобно положить  $\mathcal{M}[N] = \mathcal{M}$ .

Здесь  $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$  и  $v[k] \in \mathbb{R}^{n_v}$  — управления, которые могут иметь разные цели;  $\mathcal{M}[k], \mathcal{R}[k]$  и  $\mathcal{Q}[k]$  — заданные множества. Управления, стесненные указанными ограничениями, называем *допустимыми*. Везде ниже считаем выполненным следующее предположение.

**Предположение 1.** Все матрицы  $A[k]$  — неособые ( $\det A[k] \neq 0, k = 1, \dots, N$ ).

Изучаем задачу уклонения, где цель  $v$  — обеспечить  $x[k] \notin \mathcal{M}[k]$  во все моменты  $k = 1, \dots, N$  независимо от допустимых реализаций  $u$ , и сформулируем ее следующим образом.

**Задача 1 (Задача уклонения, задача усиленного уклонения).** Для системы (2.1) с компактными множествами  $\mathcal{R}[k], \mathcal{Q}[k]$  и  $\mathcal{M}[k]$  в условиях предположения 1 найти такие множества  $\hat{\mathcal{W}}[k]$ , содержащие  $\mathcal{M}[k]$  ( $\hat{\mathcal{W}}[k] \supseteq \mathcal{M}[k], k = 1, \dots, N$ ), и допустимую ограничениями стратегию управления  $v = v[k, x]$  ( $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k], k = 1, \dots, N$ ), чтобы каждое решение  $x[\cdot]$  системы

$$x[k] = A[k]x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k, x[k-1]], \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

начинающееся в произвольной точке вне начального множества  $\hat{\mathcal{W}}[0]$  ( $x[0] = x^0 \notin \hat{\mathcal{W}}[0]$ ), не попадало и на остальные множества  $\hat{\mathcal{W}}[k]$  ( $x[k] \notin \hat{\mathcal{W}}[k], k = 1, \dots, N$ ), каковы бы ни были допустимые управления  $u[\cdot]$ .

Ключевым элементом здесь является построение многозначной функции (трубки)  $\hat{\mathcal{W}}[\cdot]$  ( $\hat{\mathcal{W}}[k], k = 0, \dots, N$ ). В более близкой к [1, гл. 2] постановке эта задача может быть сформулирована в эквивалентном виде с использованием трубки  $\check{\mathcal{W}}[\cdot]$  с сечениями  $\check{\mathcal{W}}[k] = \mathbb{R}^n \setminus \hat{\mathcal{W}}[k]$ , являющимися дополнениями  $\hat{\mathcal{W}}[k]$  (операция дополнения определяется как  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \notin \mathcal{X}\}$ ).

**Задача 1\*.** Найти такую трубку  $\check{\mathcal{W}}[\cdot]$ , удовлетворяющую  $\check{\mathcal{W}}[k] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}[k], k = 1, \dots, N$ , и стратегию управления  $v = v[k, x]$  с  $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$ , чтобы каждое решение  $x[\cdot]$  уравнения (2.2) с начальным условием с  $x[0] = x^0 \in \check{\mathcal{W}}[0]$  не выходило из трубки  $\check{\mathcal{W}}[\cdot]$ :  $x[k] \in \check{\mathcal{W}}[k], k = 1, \dots, N$ , каковы бы ни были допустимые реализации  $u[\cdot]$ .

Трубку  $\check{\mathcal{W}}[\cdot]$  по аналогии с [2; 13; 14] можно назвать *трубкой разрешимости в задаче уклонения*, а трубку  $\hat{\mathcal{W}}[\cdot]$  по аналогии с [6; 16] — *отталкивающей* (в ориг.: *repulsive*). Введенные множества и трубки определяются не единственным образом. Условимся использовать обозначения  $\hat{\mathcal{W}}[k]$  и  $\check{\mathcal{W}}[k]$  для максимальных и минимальных множеств соответственно, т. е. для множеств всех точек, удовлетворяющих указанным условиям. При этом множества  $\hat{\mathcal{W}}[k]$  “устроены проще”, чем  $\check{\mathcal{W}}[k]$  (последние оказываются множествами с “дырками”). Мы использовали термин “усиленное уклонение”, чтобы подчеркнуть отличие от задачи терминального уклонения, в постановке которой фигурирует только одно включение  $\hat{\mathcal{W}}[N] \supseteq \mathcal{M}$  в конечный момент.

Решение этих задач, как увидим, достаточно трудоемко. Поэтому затем предполагается, что множества  $\mathcal{R}[k]$  и  $\mathcal{Q}[k]$  являются параллелотопами, а множества  $\mathcal{M}[k]$  — параллелепипедами, и рассматривается полиэдральная задача уклонения. Напомним определения.

*Параллелепипедом*  $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$  называем множество  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \mid x = p + P \operatorname{diag} \pi \cdot \eta, \|\eta\|_\infty \leq 1\}$ , где  $p \in \mathbb{R}^n$ ;  $P = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — неособая матрица ( $\det P \neq 0$ ) со столбцами  $p^i$  единичной длины ( $\|p^i\|_2 = 1$ );  $\pi \in \mathbb{R}^n, \pi \geq 0$ . Для упрощения формул условие  $\|p^i\|_2 = 1$  на евклидову норму может быть опущено. Векторные неравенства ( $\leq, <, \geq, >$ ) здесь и ниже понимаются покомпонентно. Можно сказать, что  $p$  — центр параллелепипеда,  $P$  — матрица ориентации,  $p^i$  — направления,  $\pi_i$  — величины его “полуосей”. Называем параллелепипед *невырожденным*, если  $\pi > 0$ . Невырожденность  $\mathcal{P}$  эквивалентна тому, что  $\operatorname{int} \mathcal{P} \neq \emptyset$ .

*Параллелотопом*  $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$  называем множество  $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$ , где  $p \in \mathbb{R}^n, \bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}, m \leq n$  ( $p$  определяет центр параллелотопа,  $\bar{P}$  — форму). Называем параллелотоп  $\mathcal{P}$  *невырожденным*, если  $m = n$  и  $\det \bar{P} \neq 0$ .

Каждый параллелепипед  $\mathcal{P}(p, P, \pi)$  — это параллелотоп  $\mathcal{P}[p, \bar{P}]$  с  $\bar{P} = P \operatorname{diag} \pi$ ; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед, у которого  $P = \bar{P}, \pi = e$ , где  $e = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ .

**Предположение 2.** Множества  $\mathcal{R}[k]$  и  $\mathcal{Q}[k]$  — это параллелотопы,  $\mathcal{M}$  — параллелепипед, а в качестве множеств  $\mathcal{M}[k]$  допускаются в разные моменты времени  $k \in \{1, \dots, N-1\}$  либо параллелепипеды, либо пустые множества:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[k] &= \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]], \quad \bar{R}[k] \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k], \bar{Q}[k]], \quad \bar{Q}[k] \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}, \\ \mathcal{M}[k] &= \begin{cases} \mathcal{P}[f[k], F[k], \phi[k]] \\ \text{либо } \emptyset \end{cases}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad \mathcal{M}[N] = \mathcal{M} = \mathcal{P}(p_f, P_f, \pi_f) = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Заметим, что здесь, в отличие от работ [13; 14; 17], от целевого параллелепипеда  $\mathcal{M}$  не требуется его невырожденность, важна только непустота ( $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ).

**Задача 2 (Полиэдральная задача уклонения).** В условиях предположений 1 и 2 решить задачу 1 в классе полиэдральных (параллелепипедозначных) трубок  $\mathcal{P}[\cdot] = \mathcal{P}(p[\cdot], P[\cdot], \pi[\cdot])$ , т.е. найти такую трубку  $\mathcal{P}[\cdot]$ , удовлетворяющую  $\mathcal{P}[k] \supseteq \mathcal{M}[k], k = 1, \dots, N$ , и соответствующую стратегию управления  $v = v[k, x]$  с  $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$ , чтобы каждое решение  $x[\cdot]$  уравнения (2.2) с начальным условием с  $x[0] = x^0 \notin \mathcal{P}[0]$  проходило вне трубки  $\mathcal{P}[\cdot]$ :  $x[k] \notin \mathcal{P}[k], k = 1, \dots, N$ , каковы бы ни были допустимые  $u[\cdot]$ . Более того, ввести семейство таких трубок  $\mathcal{P}[\cdot]$ .

Ранее в [17] были развиты две схемы решения *полиэдральной задачи терминального (или целевого) уклонения*, в которой требуется обеспечить только  $x[N] \notin \mathcal{M}$  в конечный момент  $N$ .

### 3. Решение задачи уклонения

Решения задачи 1 и задачи 1\* могут быть найдены при помощи соотношений, которые включают операции с множествами: *сумму Минковского* ( $\mathcal{X}^1 + \mathcal{X}^2 = \{y \mid y = x^1 + x^2, x^k \in \mathcal{X}^k\}$ ), *разность Минковского* ( $\mathcal{X}^1 - \mathcal{X}^2 = \{y \mid y + \mathcal{X}^2 \subseteq \mathcal{X}^1\} = \bigcap_{x \in \mathcal{X}^2} (\mathcal{X}^1 - x)$  [19, с. 133]), *аффинное преобразование, объединение и пересечение*.

Действительно, можно интерпретировать задачу 1\* как задачу гарантированного целевого терминального сближения с множеством  $\mathcal{M}$  при выполнении фазовых ограничений  $x[k] \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}[k]$  за счет управления  $v$  и адаптировать формулы и рассуждения, приведенные соответственно в ссылках [20] и [17], указанных в [14]. А именно рассмотрим следующую

систему рекуррентных соотношений для нахождения связанных трубок  $\check{W}^0[\cdot]$ ,  $\check{W}^1[\cdot]$  и  $\check{W}[\cdot]$ :

$$\begin{aligned} \check{W}^0[k-1] &= \check{W}[k] \dot{-} B[k]\mathcal{R}[k], \quad k = N, \dots, 1, \\ \check{W}^1[k-1] &= A[k]^{-1}(\check{W}^0[k-1] + (-C[k]\mathcal{Q}[k])), \quad k = N, \dots, 1, \\ \check{W}[k-1] &= \check{W}^1[k-1] \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}[k-1]), \quad k = N, \dots, 2, \\ \check{W}[N] &= \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}, \quad \check{W}[0] = \hat{W}^1[0] \end{aligned} \quad (3.1)$$

и соответствующую стратегию управления вида

$$v[k, x] \in \begin{cases} \mathcal{V}[k, x] = \mathcal{Q}[x] \cap \{v \mid C[k]v \in \check{W}^0[k-1] - A[k]x\} \text{ для } x \in \check{W}^1[k-1], \\ \mathcal{Q}[k] \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Пусть трубки  $\check{W}^0[\cdot]$ ,  $\check{W}^1[\cdot]$  и  $\check{W}[\cdot]$  найдены путем решения системы (3.1) “справа налево” (от  $k = N$  до  $k = 1$ ). Тогда трубка  $\check{W}[\cdot]$  вместе с любой стратегией управления  $v[k, x]$ , удовлетворяющей (3.2), дает решение задачи 1\* и является максимальной для этой задачи.

Заметим, что в силу ограниченности множеств  $\mathcal{R}[k]$ ,  $\mathcal{Q}[k]$  и  $\mathcal{M}[k]$  и промежутка управления все сечения трубок  $\check{W}^0[\cdot]$ ,  $\check{W}^1[\cdot]$  и  $\check{W}[\cdot]$  будут непусты. Подобно рассуждениям из [14, ссылка [17]] (и сходным рассуждениям, приведенным ниже при доказательстве теоремы 1) получается, что при любом  $x = x[k-1] \in \check{W}^1[k-1]$  имеем  $\mathcal{V}[k, x] \neq \emptyset$  и в случае  $x^0 \in \check{W}[0]$  при последовательном использовании стратегии (3.2) в формулах (3.2) может реализоваться только первая из указанных для  $x$  возможностей. Вторая из указанных в (3.2) для  $x$  возможностей дополняет определение  $v[k, x]$  для всех  $x$ , но при  $x^0 \notin \check{W}[0]$ , вообще говоря, не гарантирует выполнение всех соотношений  $x[k] \notin \mathcal{M}[k]$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

**Утверждение 2.** Множества  $\check{W}^0[k]$ ,  $\check{W}^1[k]$  и  $\check{W}[k]$ , фигурирующие в системе (3.1), определяются соотношениями

$$\check{W}^0[k] = \mathbb{R}^n \setminus \hat{W}^0[k], \quad \check{W}^1[k] = \mathbb{R}^n \setminus \hat{W}^1[k], \quad \check{W}[k] = \mathbb{R}^n \setminus \hat{W}[k],$$

где  $\hat{W}^0[k]$ ,  $\hat{W}^1[k]$  и  $\hat{W}[k]$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \hat{W}^0[k-1] &= \hat{W}[k] + (-B[k]\mathcal{R}[k]), \quad k = N, \dots, 1, \\ \hat{W}^1[k-1] &= A[k]^{-1}(\hat{W}^0[k-1] \dot{-} C[k]\mathcal{Q}[k]), \quad k = N, \dots, 1, \\ \hat{W}[k-1] &= \hat{W}^1[k-1] \cup \mathcal{M}[k], \quad k = N, \dots, 2, \\ \hat{W}[N] &= \mathcal{M}, \quad \hat{W}[0] = \hat{W}^1[0]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При этом трубка  $\hat{W}[\cdot]$  вместе с любой стратегией управления  $v[k, x]$ , удовлетворяющей

$$v[k, x] \in \begin{cases} \mathcal{V}[k, x] = \mathcal{Q}[x] \cap \{v \mid C[k]v \in (\mathbb{R}^n \setminus \hat{W}^0[k-1]) - A[k]x\} \text{ для } x \notin \hat{W}^1[k-1], \\ \mathcal{Q}[k] \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (3.4)$$

дает решение задачи 1 и является минимальной для этой задачи.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** С учетом утверждения 1 остается проверить (3.3). Для этого воспользуемся соотношениями вида

$$\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{X}^1 \dot{-} \mathcal{X}^2) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}^1 + (-\mathcal{X}^2), \quad \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{X}^1 + (-\mathcal{X}^2)) = (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}^1) \dot{-} \mathcal{X}^2, \quad (3.5)$$

которые вытекают из равенств [20, формулы (22) из разд. 4.2.1] (см. также [19, с. 137]; в обеих книгах используются иные обозначения), показывающих, что сумма и разность Минковского выражаются друг через друга с привлечением операции дополнения. Тогда с учетом (3.5) формулы (3.3) получаются из соотношений следующего типа, соответствующих (3.1), где для упрощения обозначений опущены аргументы:

$$\begin{aligned}\hat{W}^0 &= \mathbb{R}^n \setminus \check{W}^0 = \mathbb{R}^n \setminus (\check{W} \dot{-} B\mathcal{R}) = (\mathbb{R}^n \setminus \check{W}) + (-B\mathcal{R}) = \hat{W} + (-B\mathcal{R}), \\ \hat{W}^1 &= \mathbb{R}^n \setminus \check{W}^1 = \mathbb{R}^n \setminus (A^{-1}(\check{W}^0 + (-C\mathcal{Q}))) = A^{-1}((\mathbb{R}^n \setminus \check{W}^0) \dot{-} C\mathcal{Q}) = A^{-1}(\hat{W}^0 \dot{-} C\mathcal{Q}), \\ \hat{W} &= \mathbb{R}^n \setminus \check{W} = \mathbb{R}^n \setminus (\check{W}^1 \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M})) = (\mathbb{R}^n \setminus \check{W}^1) \cup (\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M})) = \hat{W}^1 \cup \mathcal{M}.\end{aligned}$$

□

Заметим, что в (3.3) не исключается возможность появления пустых множеств. Напомним формулы для операций с пустыми множествами (см., в частности, [20, разд. 4.2.1]):

$$\mathcal{X} + \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \dot{-} \mathcal{X} = \emptyset, \quad \mathcal{X} \dot{-} \emptyset = \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{X} \cap \emptyset = \emptyset, \quad \mathcal{X} \cup \emptyset = \mathcal{X}, \quad \mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n, \quad A \cdot \emptyset = \emptyset. \quad (3.6)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Пусть рассматривается задача терминального уклонения (когда все  $\mathcal{M}[k] = \emptyset, k = 1, \dots, N-1$ ). Тогда рекуррентные соотношения (3.3) для  $\hat{W}[\cdot]$  оказываются совпадающими с формулами [12, (31)] для так называемых попятных множеств достижимости с обратной связью максиминного типа (в ориг.: maxmin closed-loop backward reach set, CLBRS of maxmin type [12, определение 2.7]) для задачи терминального сближения за счет управления  $u$  (когда для любого возможного управления  $v[\cdot]$  гарантируется существование стратегии  $u[\cdot, \cdot]$ ). При этом попятные множества достижимости с обратной связью минимаксного типа (в ориг.: minmax closed-loop backward reach set, CLBRS of minmax type [12, определение 2.8]) для задачи сближения за счет  $u$ , гарантирующие  $x[N] \in \mathcal{M}$  при любых допустимых реализациях  $v[\cdot]$ , определяются формулами [12, (32)] с другим порядком выполнения операций Минковского, подобно (3.1), т. е. как если в (3.1) поменять местами  $B[k]\mathcal{R}[k]$  и  $C[k]\mathcal{Q}[k]$ .

Определяющие соотношения (3.3) и (3.4) включают достаточно трудоемкие операции с множествами, а формулы (3.4) содержат к тому же пересечения с множествами с дырками. Чтобы обойти эти трудности, перейдем к решению полиэдральной задачи уклонения 2.

#### 4. Одношаговая полиэдральная задача уклонения

Решение задачи 2 можно найти с использованием элементарных параллелепедозначных оценок для результатов операций с множествами. Напомним способы их построения.

Сперва отметим операции, не выводящие за классы параллелотопов и параллелепедов.

Таким свойством обладает аффинное преобразование:  $A\mathcal{P}[p, \bar{P}] + a = \mathcal{P}[Ap + a, A\bar{P}]$  для  $A \in \mathbb{R}^{n \times r}, \bar{P} \in \mathbb{R}^{r \times r}; A\mathcal{P}(p, P, \pi) = \mathcal{P}(Ap, AP, \pi)$ , если  $\det A \neq 0$ .

Далее, разность Минковского  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^1 \dot{-} \mathcal{P}^2$  параллелепипеда  $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}(p^1, P^1, \pi^1)$  и параллелотопа  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}[p^2, \bar{P}^2]$  — это либо параллелепипед с такой же матрицей ориентации, как у  $\mathcal{P}^1$ , либо пустое множество (см. лемму 3.15 в ссылке [12] из [21]). А именно пусть  $\pi^{\text{dif}} = \pi^1 - \text{Abs}((P^1)^{-1}\bar{P}^2)e$ . Тогда если  $\pi^{\text{dif}} \geq 0$ , то  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(p^1 - p^2, P^1, \pi^{\text{dif}})$ ; в противном случае  $\mathcal{Q} = \emptyset$ .

Параллелепипед  $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}(p^+, P^+, \pi^+)$  называют *внешней оценкой* множества  $\mathcal{Q}$ , если  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^+$ . Так называемая *внешняя касающаяся оценка*  $\mathcal{P}^+ = \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$  для множества  $\mathcal{Q} \neq \emptyset$  с заданной матрицей ориентации  $P^+ = V$  строится [21] на основе значений опорной функции множества  $\mathcal{Q}$ . Для пустого множества  $\mathcal{Q} = \emptyset$  будем полагать  $\mathbf{P}_V^+(\emptyset) = \emptyset$ . Матрицы  $V$  можно рассматривать как параметр, определяющий целое семейство оценок. По явным формулам легко найти [21] касающиеся оценки  $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2)$  и  $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{P}^1 \cup \mathcal{P}^2)$  для суммы параллелепипедов/параллелотопов и для их объединения.

Так, если, например,  $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}(p^1, P^1, \pi^1)$  и  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}[p^2, \bar{P}^2]$ , то  $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2) = \mathcal{P}(p^1 + p^2, V, (\text{Abs}(V^{-1}P^1))\pi^1 + (\text{Abs}(V^{-1}\bar{P}^2))e)$ .

Оценка  $P_V^+(\mathcal{P}^1 \cup \mathcal{P}^2) = \mathcal{P}(p^+, V, \pi^+)$  для случая  $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}(p^k, P^k, \pi^k)$ ,  $k = 1, 2$ , определяется формулами

$$p^+ = V(\gamma^{+(-)} + \gamma^{+(+)})/2, \quad \pi^+ = (\gamma^{+(+)} - \gamma^{+(-)})/2, \\ \gamma^{+(\pm)} = \pm \max_{1 \leq k \leq 2} \{\pm V^{-1}p^k + (\text{Abs}(V^{-1}P^k))\pi^k\}.$$

При рассмотрении вопроса о том, находится ли точка  $x$  вне параллелепипеда  $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ , удобно использовать относительные координаты  $\xi = P^{-1}(x - p)$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\xi = P^{-1}(x - p)$ . Имеем  $x \notin \mathcal{P}$  тогда и только тогда, когда найдется такой индекс  $i_*$  из  $\{1, \dots, n\}$ , что  $|\xi_{i_*}| > \pi_{i_*}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** от противного. Пусть  $x \notin \mathcal{P}$ , но  $\text{Abs} \xi \leq \pi$ . Построим вектор  $\eta$  по следующему правилу:  $\eta_i = \xi_i/\pi_i$  при  $\pi_i > 0$ ;  $\eta_i \in [-1, 1]$  для таких  $i$ , что  $\pi_i = 0$ . Тогда при  $\pi_i > 0$  имеем  $|\eta_i| \leq \pi_i/\pi_i = 1$ . А при  $\pi_i = 0$  в силу  $\text{Abs} \xi \leq \pi$  выводим  $\xi_i = 0$  и можно записать  $\xi_i = 0 \cdot \eta_i$ . Получаем  $x = p + P\xi = p + P \text{diag} \pi \cdot \eta$ , где  $\text{Abs} \eta \leq e$ , т.е.  $x \in \mathcal{P}$ . Противоречие. Обратно, пусть имеется  $i_*$  такой, что  $|\xi_{i_*}| > \pi_{i_*}$ , но  $x \in \mathcal{P}$ , т.е.  $x = p + P \text{diag} \pi \cdot \eta$ , где  $\text{Abs} \eta \leq e$ . Тогда  $\xi_{i_*} = \pi_{i_*}\eta_{i_*}$  и  $|\pi_{i_*}\eta_{i_*}| > \pi_{i_*}$ . Отсюда при  $\pi_{i_*} > 0$  вытекает неравенство  $|\eta_{i_*}| > 1$ , что противоречит предположению  $x \in \mathcal{P}$ , а при  $\pi_{i_*} = 0$  — неверное неравенство  $0 > 0$ , т.е. опять противоречие.  $\square$

Для дальнейшего полезно рассмотреть следующую вспомогательную элементарную задачу.

**З а д а ч а 3 (Одношаговая полиэдральная задача уклонения).** Даны множества  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{R} = \mathcal{P}[r, \bar{R}]$  с  $\bar{R} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ ,  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}[q, \bar{Q}]$  с  $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$  и матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с  $\det A \neq 0$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$ . Найти такое множество  $\hat{\mathcal{P}}$  в виде параллелепипеда  $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\hat{p}, \hat{P}, \hat{\pi})$  либо  $\hat{\mathcal{P}} = \emptyset$  и такую стратегию управления  $v^* = v(x)$ , что  $v^* \in \mathcal{Q}$  и для любого  $x \notin \hat{\mathcal{P}}$  выполняется  $Ax + Bu + cv^* \notin \mathcal{P}$  при любом  $u \in \mathcal{R}$ .

В условиях задачи 3 пусть  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — произвольная неособая матрица. Положим

$$\hat{p} = A^{-1}(p - Br - Cq), \quad \hat{P} = A^{-1}V, \quad \hat{\pi} = (\text{Abs}(V^{-1}P))\pi + \alpha - \gamma, \\ \alpha = (\text{Abs} \Xi)e, \quad \Xi = V^{-1}B\bar{R}, \quad \gamma = (\text{Abs} \Theta)e, \quad \Theta = V^{-1}C\bar{Q} \quad (4.1)$$

и введем множество  $\hat{\mathcal{P}}$ , которое с учетом указанных в начале этого раздела фактов можно записать в виде двух эквивалентных представлений

$$\hat{\mathcal{P}} = A^{-1}(\mathcal{P}^0 \dot{-} C\mathcal{Q}), \quad \text{где } \mathcal{P}^0 = P_V^+(\mathcal{P} + (-BR)); \\ \hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\hat{p}, \hat{P}, \hat{\pi}), \quad \text{если } \hat{\pi} \geq 0, \quad \hat{\mathcal{P}} = \emptyset \quad \text{в противном случае.} \quad (4.2)$$

Для любого  $x \notin \hat{\mathcal{P}}$  вектор  $v^* = v(x)$  построим по следующему правилу:

$$v(x) = q + \bar{Q}\chi(x), \quad \chi_j(x) = \text{sign} \Theta_{i_*}^j \text{sign} \xi_{i_*}(x), \quad j = 1, \dots, n_v, \quad \xi(x) = \hat{P}^{-1}(x - \hat{p}), \quad (4.3)$$

если  $\hat{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ , где  $i_*$  в (4.3) — любой индекс  $i_* = i_*(x) \in \{1, \dots, n\}$ , такой что  $|\xi_{i_*}(x)| > \hat{\pi}_{i_*}$ ;

$$v(x) = q + \bar{Q}\chi(x), \quad \chi_j(x) = \text{sign} \Theta_{i_*}^j \cdot \mu(x), \quad j = 1, \dots, n_v, \quad \mu(x) = \begin{cases} \text{sign} \xi_{i_*}(x) & \text{при } \xi_{i_*}(x) \neq 0, \\ 1 \text{ или } -1 & \text{при } \xi_{i_*}(x) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

если  $\hat{\mathcal{P}} = \emptyset$ , где  $i_*$  в (4.4) — любой индекс  $i_* \in \{1, \dots, n\}$ , такой что  $\hat{\pi}_{i_*} < 0$ .

**Лемма 2.** В условиях задачи 3 пусть  $V$  — произвольная неособая матрица. Тогда множество  $\hat{\mathcal{P}}$ , найденное по формулам (4.1), (4.2), и вектор  $v^* = v(x)$ , определенный по формулам (4.3), (4.4), дают решение задачи 3. При этом имеем  $\hat{\mathcal{P}} \supseteq A^{-1}((\mathcal{P} + (-BR)) \dot{-} C\mathcal{Q})$  и  $v^* \in \hat{\mathcal{V}}^+(x) = \mathcal{Q} \cap \{v \mid Cv \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}^0) - Ax\}$  для  $x \notin \hat{\mathcal{P}}$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \notin \hat{\mathcal{P}}$  и  $y = Ax + Bu + Cv^*$ , где  $u = r + \bar{R}\delta$ ,  $\delta \leq e$ , а  $v^* = q + \bar{Q}\chi^*$ , где  $\chi^* = \chi(x)$  находится по формулам (4.3), (4.4). Разложим  $x - \hat{p}$  и  $y - p$  по базисам, определяемым столбцами  $\hat{P}$  и  $V$  соответственно:  $x = \hat{p} + \hat{P}\xi$  и  $y = p + V\zeta$ . Подставляя в последнее равенство выражения для  $y$ ,  $x$ ,  $u$ ,  $v^*$  и учитывая (4.1), получим  $V\zeta = V\xi + B\bar{R}\delta + C\bar{Q}\chi^*$ , т.е.  $\zeta = \xi + \Xi\delta + \Theta\chi^*$ . Рассмотрим два возможных случая: когда  $\hat{\mathcal{P}} \neq \emptyset$  и когда  $\hat{\mathcal{P}} = \emptyset$ .

В первом случае имеем  $\hat{\pi} \geq 0$ . В силу леммы 1 найдется такой индекс  $i_*$ , что  $|\xi_{i_*}| > \hat{\pi}_{i_*}$ . Положим для определенности, что  $\xi_{i_*} > \hat{\pi}_{i_*}$ ,  $\text{sign } \xi_{i_*} = 1$  (другая возможность рассматривается аналогично). Учитывая формулы (4.3) для вычисления  $\chi^* = \chi(x)$ , неравенства  $\text{Abs } (\Xi\delta) \leq (\text{Abs } \Xi)e = \alpha$  для  $u \in \mathcal{R}$  и выражения для  $\hat{\pi}$  из (4.1), а затем используя  $\xi_{i_*} > \hat{\pi}_{i_*}$ , выводим

$$\begin{aligned} \zeta_{i_*} &= \xi_{i_*} + e^{i_*\top} \Xi\delta + \sum_j \Theta_{i_*}^j \text{sign } \Theta_{i_*}^j \text{sign } \xi_{i_*} \geq \xi_{i_*} - \alpha_{i_*} + \gamma_{i_*} \cdot 1 \\ &= \xi_{i_*} + e^{i_*\top} (\text{Abs } (V^{-1}P)) \pi - \hat{\pi}_{i_*} > e^{i_*\top} (\text{Abs } (V^{-1}P)) \pi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом,  $|\zeta_{i_*}|$  оказывается больше  $i_*$ -й полуоси параллелепипеда  $P_V^+(\mathcal{P}) = \mathcal{P}(p, V, (\text{Abs } (V^{-1}P)) \pi)$ ; ввиду леммы 1 получаем  $y \notin P_V^+(\mathcal{P})$  и, значит, тем более  $y \notin \mathcal{P}$ .

Во втором случае найдется такой индекс  $i_*$ , что  $\hat{\pi}_{i_*} < 0$ . При  $\xi_{i_*} > 0$  и при  $\xi_{i_*} = 0$ ,  $\mu = 1$  (другие возможности рассматриваются аналогично) подобными выкладками получаем  $\zeta_{i_*} \geq \xi_{i_*} - \alpha_{i_*} + \gamma_{i_*} \cdot \mu = \xi_{i_*} + e^{i_*\top} (\text{Abs } (V^{-1}P)) \pi - \hat{\pi}_{i_*}$ , где с учетом  $\hat{\pi}_{i_*} < 0$  слагаемое  $\xi_{i_*} - \hat{\pi}_{i_*} > 0 + 0 = 0$  и, значит, последнее неравенство из (4.5) опять выполняется, гарантируя, что  $y \notin P_V^+(\mathcal{P})$ .

Включение  $\hat{\mathcal{P}} \supseteq A^{-1}((\mathcal{P} + (-BR)) \dot{-} CQ)$  вытекает из свойств элементарных оценок.

Убедимся, что при  $x \notin \hat{\mathcal{P}}$  справедливо  $v^* \in \hat{V}^+(x)$ . Согласно (4.3), (4.4) очевидно, что  $v^* \in Q$ , и нужно проверить, что  $z = Ax + Cv^* \notin \mathcal{P}^0$ . Замечаем, что  $\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}(p - Br, V, (\text{Abs } (V^{-1}P)) \pi + \alpha)$ . Рассуждения аналогичны вышеприведенным. Представим  $z$  и  $x$  как  $z = p - Br + V\eta$ ,  $x = \hat{p} + \hat{P}\xi$ . В случае с  $\hat{\pi} \geq 0$  и  $\xi_{i_*} > \hat{\pi}_{i_*}$  имеем  $\eta_{i_*} = \xi_{i_*} + \gamma_{i_*} \cdot 1 > \hat{\pi}_{i_*} + \gamma_{i_*} = e^{i_*\top} (\text{Abs } (V^{-1}P)) \pi + \alpha_{i_*}$ . А в случае  $\hat{\mathcal{P}} = \emptyset$ ,  $\hat{\pi}_{i_*} < 0$  при  $\xi_{i_*} > 0$  и при  $\xi_{i_*} = 0$ ,  $\mu = 1$  получаем

$$\eta_{i_*} = \xi_{i_*} + \gamma_{i_*} \cdot 1 = \xi_{i_*} + e^{i_*\top} (\text{Abs } (V^{-1}P)) \pi + \alpha_{i_*} - \hat{\pi}_{i_*} > 0 + e^{i_*\top} (\text{Abs } (V^{-1}P)) \pi + \alpha_{i_*} + 0.$$

Во всех других случаях  $|\eta_{i_*}|$  также оказывается больше  $i_*$ -й полуоси параллелепипеда  $\mathcal{P}^0$ , откуда  $z \notin \mathcal{P}^0$ .  $\square$

Для применения к решению задачи 2 введем следующие операции построения множеств и управлений, которые определены и для случаев с  $\mathcal{P} = \emptyset$  и  $x \in \hat{\mathcal{P}}$ . Положим

$$\hat{P}_V^+(\mathcal{P}, \mathcal{R}, Q, A, B, C) = \hat{\mathcal{P}} \text{ при } \mathcal{P} \neq \emptyset, \quad \hat{P}_V^+(\mathcal{P}, \mathcal{R}, Q, A, B, C) = \emptyset \text{ при } \mathcal{P} = \emptyset, \quad (4.6)$$

где фигурируют исходные данные из задачи 3,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и множество  $\hat{\mathcal{P}}$  из (4.1), (4.2).

Введем три стратегии управления  $v^l(x) = v_V^l(x, \mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}, Q, C)$ ,  $l = 0, 1, 2$ , соответствующие  $\mathcal{P}$  и  $\hat{\mathcal{P}}$  и основанные на разных способах конкретизации и доопределения формул (4.3), (4.4).

Положим  $v_V^0(x, \mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}, Q, C) = v^0(x)$ , где  $v^0(x) = v(x)$  из (4.3), (4.4) при  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  и  $x \notin \hat{\mathcal{P}}$ ;  $v^0(x)$  равно  $q$  или любому  $v \in Q$ , если либо  $\mathcal{P} = \emptyset$ , либо  $\hat{\mathcal{P}} \neq \emptyset$  и  $x \in \hat{\mathcal{P}}$ .

Для определения  $v^l(x)$ ,  $l = 1, 2$ , предварительно введем две вектор-функции  $\Phi^l(x, \hat{\mathcal{P}})$  (где  $\Phi^2(x, \hat{\mathcal{P}})$  задана только для невырожденного параллелепипеда  $\hat{\mathcal{P}}$ , т.е. при  $\text{int } \hat{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ ):

$$\Phi^1(x, \hat{\mathcal{P}}) = \text{Abs } \xi - \hat{\pi}, \quad \Phi^2(x, \hat{\mathcal{P}}) = (\text{diag } \hat{\pi})^{-1} \text{Abs } \xi, \quad \text{где } \xi = \hat{P}^{-1}(x - \hat{\pi}). \quad (4.7)$$

Теперь положим  $v_V^l(x, \mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}, Q, C) = v^l(x)$  (где  $v^2(x)$  определена только при  $\text{int } \hat{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ ):

$$v^1(x) = \begin{cases} q + \bar{Q}\chi^1(x), & \text{если } \mathcal{P} \neq \emptyset \text{ и } \hat{\mathcal{P}} \neq \emptyset; \\ q + \bar{Q}\chi^\emptyset(x), & \text{если } \mathcal{P} \neq \emptyset \text{ и } \hat{\mathcal{P}} = \emptyset; \\ q, & \text{если } \mathcal{P} = \emptyset; \end{cases} \quad v^2(x) = \begin{cases} q + \bar{Q}\chi^2(x), & \\ \text{если } \mathcal{P} \neq \emptyset \text{ и } \text{int } \hat{\mathcal{P}} \neq \emptyset; \\ q, & \text{если } \mathcal{P} = \emptyset. \end{cases} \quad (4.8)$$



Здесь  $\chi^l(x)$ ,  $l = 1, 2$ , вычисляются по формулам для  $\chi(x)$  из (4.3) для любых  $x \in \mathbb{R}^n$  (а не только для  $x \notin \hat{\mathcal{P}}$ ), причем  $i_*$  в (4.3) — любой индекс  $i_* = i_*(x) \in \{1, \dots, n\}$ , такой что  $i_* \in \text{Argmax}_{1 \leq i \leq n} \Phi_i^l(x)$ . Вектор  $\chi^\emptyset(x)$  вычисляется по формулам для  $\chi(x)$  из (4.4) для любых  $x \in \mathbb{R}^n$ , причем  $i_*$  в (4.4) — любой индекс  $i_* = i_*(x) \in \{1, \dots, n\}$ , такой что  $i_* \in \text{Argmax} \{ \Phi_i^1(x) \mid i \in \{1, \dots, n\}, \hat{\pi}_i < 0 \}$ , а также для определенности полагается  $\mu(x) = 1$  при  $\xi_{i_*}(x) = 0$ .

Заметим, что  $v^0(x)$  просто доопределяет  $v(x)$  из леммы 2 на случаи  $\mathcal{P} = \emptyset$  и  $x \in \hat{\mathcal{P}}$ , а  $v^1(x)$ ,  $v^2(x)$  из (4.8) с учетом леммы 1 представляют два частных способа конкретизации формул для  $v^0(x)$ .

**Следствие 1.** В условиях леммы 2 множество  $\hat{\mathcal{P}}_V^+(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{Q}, A, B, C)$  из (4.6) вместе с каждым из введенных выше векторов  $v^l(x) = v_V^l(x, \mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}, \mathcal{Q}, C)$ ,  $l = 0, 1$ , дает решение задачи 3, и при этом для  $x \notin \hat{\mathcal{P}}$  имеем  $v^l(x) \in \hat{\mathcal{V}}^+(x)$ . В случае  $\text{int } \hat{\mathcal{P}} \neq \emptyset$  эти же утверждения справедливы также для  $v^2(x) = v_V^2(x, \mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}, \mathcal{Q}, C)$ .

## 5. Решение полиэдральной задачи уклонения

Введем теперь семейство полиэдральных трубок  $\mathcal{P}[\cdot]$ , определяемых соотношениями, которые задаются явными формулами для вычисления параллелепипедов  $\mathcal{P}^0[k] = \mathcal{P}(p^0[k], P^0[k], \pi^0[k])$ ,  $\mathcal{P}^1[k] = \mathcal{P}(p^1[k], P^1[k], \pi^1[k])$  и  $\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}(p[k], P[k], \pi[k])$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^0[k-1] &= \mathbf{P}_{P^0[k-1]}^+(\mathcal{P}[k] + (-B[k]\mathcal{R}[k])), \quad k = N, \dots, 1, \\ \mathcal{P}^1[k-1] &= A[k]^{-1}(\mathcal{P}^0[k-1] \dot{-} C[k]\mathcal{Q}[k]), \quad k = N, \dots, 1, \\ \mathcal{P}[k-1] &= \mathbf{P}_{P[k-1]}^+(\mathcal{P}^1[k-1] \cup \mathcal{M}[k-1]), \quad k = N, \dots, 2, \\ \mathcal{P}[N] &= \mathbf{P}_{P[N]}^+(\mathcal{M}), \quad \mathcal{P}[0] = \mathcal{P}^1[0]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

При этом допускается вырождение  $\mathcal{P}^0[k]$ ,  $\mathcal{P}^1[k]$  и  $\mathcal{P}[k]$  в пустые множества. В частности, если на каком-то шаге получается  $\pi^1[k-1] < 0$ , то принимаем, что  $\mathcal{P}^1[k-1] = \emptyset$ .

**Теорема 1.** В условиях предположений 1 и 2 пусть  $P[k]$ ,  $k = N, \dots, 1$ , и  $\hat{P}^0[k]$ ,  $k = N-1, \dots, 0$ , — произвольные неособые матрицы ориентации и трубки  $\mathcal{P}[\cdot]$ ,  $\mathcal{P}^0[\cdot]$  и  $\mathcal{P}^1[\cdot]$  найдены из соотношений (5.1). Тогда они определяют внешние оценки для трубок из (3.3):

$$\hat{\mathcal{W}}[k] \subseteq \mathcal{P}[k], \quad \hat{\mathcal{W}}^0[k] \subseteq \mathcal{P}^0[k], \quad \hat{\mathcal{W}}^1[k] \subseteq \mathcal{P}^1[k], \quad k = N, \dots, 0, \tag{5.2}$$

и трубка  $\mathcal{P}[\cdot]$  вместе с любой стратегией управления  $v[k, x]$ , удовлетворяющей

$$v[k, x] \in \begin{cases} \mathcal{V}^+[k, x] = \mathcal{Q}[x] \cap \{v \mid C[k]v \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}[k]) \dot{-} B[k]\mathcal{R}[k] - A[k]x\} \\ = \mathcal{Q}[x] \cap \{v \mid C[k]v \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{P}[k] + (-B[k]\mathcal{R}[k]) - A[k]x)\} \text{ для } x \notin \mathcal{P}^1[k-1], \\ \mathcal{Q}[k] \text{ в противном случае} \end{cases} \tag{5.3}$$

либо удовлетворяющей более простому включению

$$v[k, x] \in \begin{cases} \hat{\mathcal{V}}^+[k, x] = \mathcal{Q}[x] \cap \{v \mid C[k]v \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}^0[k-1] - A[k]x\} \text{ для } x \notin \mathcal{P}^1[k-1], \\ \mathcal{Q}[k] \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{5.4}$$

дает решение задачи 2. При этом для любого  $x \notin \mathcal{P}^1[k-1]$  имеем  $\hat{\mathcal{V}}^+[k, x] \neq \emptyset$  и  $\mathcal{V}^+[k, x] \supseteq \hat{\mathcal{V}}^+[k, x]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Включения (5.2) вытекают из (3.3) в силу построения элементарных оценок. Эквивалентность двух представлений  $\mathcal{V}^+[k, x]$  в (5.3) получается с учетом второй из формул в (3.5) и соотношений типа  $\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{X} + y) = (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}) + y$ .

Покажем, что  $\hat{\mathcal{V}}^+[k, x] \neq \emptyset$  при любом  $x \notin \mathcal{P}^1[k-1]$ . Заметим, что в соответствии с (5.1) и (3.5)

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}^1[k-1] = A[k]^{-1}((\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}^0[k-1]) + (-C[k]\mathcal{Q}[k])).$$

Следовательно, для  $x \notin \mathcal{P}^1[k-1]$  имеем  $A[k]x \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}^0[k-1]) + (-C[k]\mathcal{Q}[k])$ , иначе говоря найдутся  $z \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}^0[k-1]$  и  $v \in \mathcal{Q}[k]$  такие, что  $A[k]x = z - C[k]v$ , откуда  $C[k]v = z - A[k]x$ , т. е.  $v \in \hat{\mathcal{V}}^+[k, x]$  и  $\hat{\mathcal{V}}^+[k, x] \neq \emptyset$ .

При этом ввиду формул из (5.3), (5.4) и включения  $\mathcal{P}^0[k-1] \supseteq \mathcal{P}[k] + (-B[k]\mathcal{R}[k])$ , вытекающего из (5.1), получаются включения  $\hat{\mathcal{V}}^+[k, x] \subseteq \mathcal{V}^+[k, x] \subseteq \mathcal{Q}[k]$  и, как результат, непустота  $\mathcal{V}^+[k, x]$  для  $x \notin \mathcal{P}^1[k-1]$ .

Пусть система (5.1) решена. Остается показать, что использование любого управления  $v[\cdot, \cdot]$  из (5.3), начиная с  $x[0] \notin \mathcal{P}[0]$ , обеспечивает  $x[k] \notin \mathcal{P}[k]$  (а согласно (5.1) получим и  $x[k] \notin \mathcal{M}[k]$ ) при всех  $k = 1, \dots, N$ . Итак, пусть  $x \notin \mathcal{P}[k-1]$  и, значит, в силу третьей строки в (5.1)  $x \notin \mathcal{P}^1[k-1]$ , а потому  $\mathcal{V}^+[k, x] \neq \emptyset$ . Тогда при любом  $v[k, x]$  из (5.3) и произвольном  $u[k] \in \mathcal{R}[k]$  имеем  $A[k]x + B[k]u[k] + C[k]v[k, x] \in A[k]x + B[k]\mathcal{R}[k] + (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}[k]) - B[k]\mathcal{R}[k] - A[k]x \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}[k]$  (использовано свойство операций Минковского  $(\mathcal{X}^1 - \mathcal{X}^2) + \mathcal{X}^2 \subseteq \mathcal{X}^1$  ( $\mathcal{X}^2 \neq \emptyset$ ) [19, с. 133]).  $\square$

Теорема 1 дает решение задачи 2 и достаточно широкие возможности для выбора управлений  $v[k, x]$ , но не предлагает явных формул для их вычисления. Для исследования этого вопроса воспользуемся конструкциями, введенными в разд. 4 при решении одношаговой задачи 3. Рассмотрим следующие рекуррентные соотношения для вычисления полиэдральных трубок  $\mathcal{P}^1[\cdot]$  и  $\mathcal{P}[\cdot]$ :

$$\mathcal{P}^1[k-1] = \hat{\mathbf{P}}_{\mathcal{P}^0[k-1]}^+(\mathcal{P}[k], \mathcal{R}[k], \mathcal{Q}[k], A[k], B[k], C[k]), \quad k = N, \dots, 1,$$

$$\mathcal{P}[k-1] = \mathbf{P}_{\mathcal{P}[k-1]}^+(\mathcal{P}^1[k-1] \cup \mathcal{M}[k-1]), \quad k = N, \dots, 2, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{P}[N] = \mathbf{P}_{\mathcal{P}[N]}^+(\mathcal{M}), \quad \mathcal{P}[0] = \mathcal{P}^1[0],$$

и три соответствующие стратегии управления, определяемые формулами

$$v^l[k, x] = v_{\mathcal{P}^0[k-1]}^l(x, \mathcal{P}[k], \mathcal{P}^1[k-1], \mathcal{Q}[k], C[k]), \quad l = 0, 1, 2. \quad (5.6)$$

**Теорема 2.** В условиях предположений 1 и 2 пусть  $\mathcal{P}[k]$ ,  $k = N, \dots, 1$ , и  $\mathcal{P}^0[k]$ ,  $k = N-1, \dots, 0$ , — произвольные неособые матрицы ориентации и трубки  $\mathcal{P}[\cdot]$  и  $\mathcal{P}^1[\cdot]$  — найдены из соотношений (5.5). Тогда трубка  $\mathcal{P}[\cdot]$  вместе с любой из стратегий управления  $v^l[\cdot, \cdot]$ ,  $l \in \{0, 1\}$ , определяемых формулами (5.6) и подробно описанных в конце разд. 4, дает решение задачи 2. Если при решении системы (5.5) все множества  $\mathcal{P}[k]$  и  $\mathcal{P}^1[k]$  оказываются невырожденными параллелепипедами, то определена и стратегия управления  $v^2[\cdot, \cdot]$  и трубка  $\mathcal{P}[\cdot]$  вместе с  $v^2[\cdot, \cdot]$  также дает решение задачи 2. При этом если  $x[\cdot]$  — траектория, соответствующая  $x[0] \notin \mathcal{P}[0]$ , управлению  $v^l[\cdot, \cdot]$  и некоторому (произвольному) допустимому управлению  $u[\cdot]$ , то  $x[k] \notin \mathcal{P}[k]$ ,  $k = 1, \dots, N$ , имеем  $\hat{\mathcal{V}}^+[k, x] \neq \emptyset$  и выполняются все требуемые условия уклонения  $x[k] \notin \mathcal{M}[k]$  во все моменты  $k = 1, \dots, N$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть система (5.5) решена. Утверждения теоремы получаются в результате последовательного применения следствия 1 для шагов  $k = 1, \dots, N$ , где роль множеств  $\mathcal{P}$  и  $\hat{\mathcal{P}}$  играют  $\mathcal{P}[k]$  и  $\mathcal{P}^1[k-1]$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е 2.** Утверждения теоремы 2 справедливы также для стратегии управления  $v^3[\cdot, \cdot]$ , которая, базируясь на  $v^2[\cdot, \cdot]$ , обеспечивает переключение с формул (5.6) для  $v^2[k, x]$

на тех шагах  $k$ , где они не применимы ввиду вырождения или пустоты  $\mathcal{P}^1[k-1]$ , на формулы для  $v^1[k, x]$ .

**З а м е ч а н и е 3.** С учетом формул для элементарных оценок из разд. 4 и (3.6) несложно видеть, что системы (5.1) и (5.5) для нахождения полиэдральных трубок в теоремах 1 и 2 задаются эквивалентными соотношениями. А в силу следствия 1 одноточечные управления  $v^l[k, x]$ ,  $l = 0, \dots, 3$ , при  $x \notin \mathcal{P}^1[k-1]$  оказываются элементами множеств  $\hat{V}^+[k, x]$  из теоремы 1.

**З а м е ч а н и е 4.** Управления  $v^l[k, x]$ ,  $l=0, \dots, 3$ , при применении к  $x = x[k-1] \in \mathcal{P}^1[k-1]$  не могут гарантировать  $x[k] \notin \mathcal{P}[k]$ . Но они определены при любых  $x$  в надежде, что при “не самых плохих с точки зрения  $v$ ” реализациях  $u[k]$  смогут обеспечить желаемый результат и “выправить ситуацию” на каком-то шаге, особенно в случаях, когда  $x$  оказалось внутри  $\mathcal{P}^1[k-1]$  (например, из-за неучтенных вычислительных погрешностей) близко к границе. Интуитивно  $v^l[k, x]$ ,  $l = 1, 2, 3$ , могут оказаться полезнее, чем  $v^0[k, x]$ .

Матричные функции  $P^0[\cdot]$  и  $P[\cdot]$  в (5.1) выступают как параметры, определяющие семейства полиэдральных трубок  $\mathcal{P}[\cdot]$ .

**З а м е ч а н и е 5.** При рассмотрении систем (2.1), полученных дискретизацией по схеме Эйлера (см., например, [13, (4.13)] и разд. 6), естественно брать  $P^0[\cdot]$  в (5.1) и (5.5), последовательно полагая  $P^0[k-1] = P[k]$ , где  $P^0[k-1]$  и  $P[k]$  — матрицы ориентации  $\mathcal{P}^0[k-1]$  и  $\mathcal{P}[k]$ . Несложно убедиться, что при этом в случае отсутствия промежуточных множеств  $\mathcal{M}[k]$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ , параллелепипедозначные трубки  $\mathcal{P}[\cdot]$  при условии невырожденности всех сечений и управления  $v^2[\cdot, \cdot]$  фактически совпадают с параллелотопозначными трубками  $\mathcal{P}^+[\cdot]$  и управлениями  $v^l[\cdot, \cdot]$ , введенными ранее для решения полиэдральной задачи терминального (целевого) уклонения (см. [17, формулы (3.1)–(3.4)]).

**З а м е ч а н и е 6.** Можно предложить два следующих простых эвристических способа выбора матриц  $P[k]$  в (5.1) и (5.5) для  $k = N-1, \dots, 1$ :

(а) брать  $P[k] = P^1[k]$ , где  $P^1[k]$  — матрицы ориентации  $\mathcal{P}^1[k]$ ;

(б) при  $\mathcal{M}[k] \neq \emptyset$  брать  $P[k]$  из соображений простейшей “локальной оптимизации по объему”:  $P[k] \in \text{Argmin}_{V \in \{P^1[k], F[k]\}} \text{vol } P_V^+(\mathcal{P}^1[k] \cup \mathcal{M}[k])$ , где  $F[k]$  — матрицы ориентации  $\mathcal{M}[k]$  из (2.3).

При выборе матричных функций  $P^0[\cdot]$  и  $P[\cdot]$  с помощью замечаний 5 и 6 получаем семейство трубок  $\mathcal{P}[\cdot]$ , зависящих только от одного матричного параметра  $P[N]$ .

Использование нескольких трубок можно организовать, например, следующим образом. Пусть задана начальная точка  $x^0$  и построено несколько трубок  $\mathcal{P}^j[\cdot]$  (и соответствующих трубок  $\mathcal{P}^{1,j}[\cdot]$ ),  $j=1, \dots, N^+$ , удовлетворяющих (5.5). Если  $j_*$  — единственный из индексов  $j \in \{1, \dots, N^+\}$  таких, что  $x^0 \notin \mathcal{P}^j[0]$ , то нужно использовать  $\mathcal{P}^{j_*}[\cdot]$  (для краткости здесь и ниже говорим об использовании  $\mathcal{P}^{j_*}[\cdot]$ , хотя для построения соответствующей стратегии управления  $v[\cdot, \cdot]$  одновременно нужно привлекать и  $\mathcal{P}^{1,j_*}[\cdot]$ ). В противном случае можно привести следующие эвристические рекомендации по выбору номера  $j_*$  применяемой трубки  $\mathcal{P}^{j_*}[\cdot]$ .

Если имеется несколько трубок  $\mathcal{P}^j[\cdot]$  таких, что

$$\mathcal{P}^j[k^j] \neq \emptyset, \quad \mathcal{P}^j[k] = \emptyset, \quad k = 0, \dots, k^j - 1, \quad (5.7)$$

то находим величину  $k^+ = \max\{k^j \mid k^j \text{ удовлетворяет (5.7)}\}$ ; если же все  $\mathcal{P}^j[1] \neq \emptyset$ ,  $j = 1, \dots, N^+$ , то полагаем  $k^+ = 1$ .

В случае  $k^+ > 1$  выбираем любую трубку из тех, для которых промежутки  $[0, k^j] \subseteq [0, N]$  — наибольший, т. е.  $j_* \in \text{Argmax}\{k^j \mid k^j \text{ удовлетворяет (5.7)}\}$  и имеем  $k^+ = k^{j_*}$ ; при этом принимаем  $v[k, \cdot] = q[k]$ ,  $k = 1, \dots, k^+ - 1$ .

В случае  $k^+ = 1$  разбиваем множество  $\{1, \dots, N^+\}$  на подмножества  $J_{\text{empty}}$ ,  $J_{\text{nondeg}}$  и  $J_{\text{deg}}$  индексов  $j$  таких, что начальные сечения  $\mathcal{P}^{1,j}[0]$  трубок  $\mathcal{P}^{1,j}[\cdot]$  оказываются пустыми множествами, невырожденными и вырожденными параллелепипедами соответственно. Если

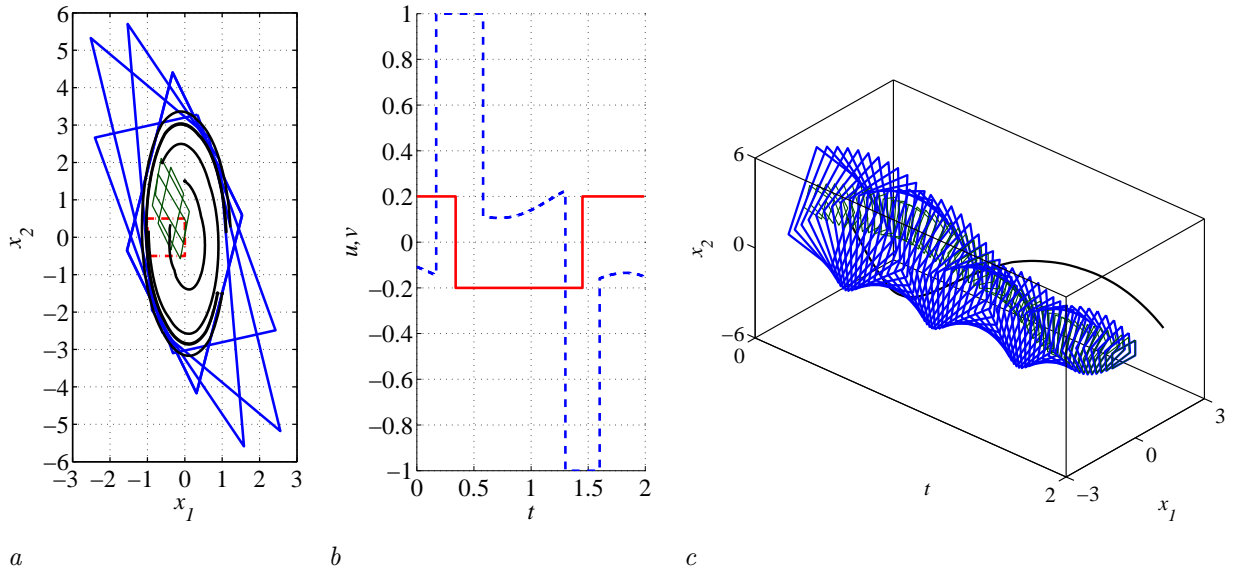


Рис. 1. Результаты моделирования в примере 1: *a* — несколько сечений  $\mathcal{P}^j[0]$  (толстые линии) и  $\mathcal{P}^{-\gamma}[0]$  (тонкие линии), множество  $\mathcal{M}$  (штриховая линия) и траектории  $x^i[.]$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ; *b* — реализации управлений  $v^1$  и  $u$  для  $x^{0,5}$  (сплошная и штриховая линии соответственно); *c* — траектория  $x^5[.]$  и использованные для построения управлений трубки  $\mathcal{P}^{j^*}[.]$  и  $\mathcal{P}^{-\gamma^*}[.]$

$J_{\text{empty}} \neq \emptyset$ , то в качестве  $j_*$  берем произвольное  $j_* \in J_{\text{empty}}$ . А при  $J_{\text{empty}} = \emptyset$  используем функции  $\Phi^l$  из (4.7), чтобы найти те сечения  $\mathcal{P}^{1,j}[0]$ , от которых  $x^0$  “отстоит подальше” в выбранном смысле. При этом для применения  $v^2$  и  $v^3$  в случае  $J_{\text{nondeg}} \neq \emptyset$  берем  $j_* \in \text{Argmax}_{j \in J_{\text{nondeg}}} \|\Phi^2(x^0, \mathcal{P}^{1,j}[0])\|_{\infty}$ ; для применения  $v^1$ , а также  $v^3$  в случае  $J_{\text{nondeg}} = \emptyset$  берем  $j_* \in \text{Argmax}_{1 \leq j \leq N+1} \|\Phi^1(x^0, \mathcal{P}^{1,j}[0])\|_{\infty}$ .

**З а м е ч а н и е 7.** Основным преимуществом предложенного метода является его сравнительно небольшая трудоемкость и применимость к задачам управления в системах большой размерности. При этом можно строить как одну трубку, так и несколько. Тот факт, что трубки находятся независимо друг от друга, открывает возможность для параллельных вычислений. Вычислительная сложность построения одной полиэдральной трубки и ее сравнение с рядом других распространенных методов могут быть описаны подобно проведенному в [16, разд. 4] рассмотрению другого полиэдрального метода. В нашем случае вычислительную сложность построения сечения трубки на каждом  $k$ -м шаге можно грубо оценить как  $O(n^4)$ .

Предложенные алгоритмы доведены до программной реализации. Ниже представлены примеры численного моделирования для двумерного случая, который особенно подходит для визуализации трубок и демонстрации успешной работы построенных управлений.

## 6. Примеры

Для наглядности проиллюстрируем решение задачи 2 на примере модельной двумерной системы, полученной путем дискретизации по Эйлера дифференциальной системы, рассматриваемой на интервале времени  $t \in [0, \theta]$ , полагая  $n = 2$ ,  $A[k] \equiv I + h_N \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B[k] \equiv h_N \cdot (0, 1)^\top$ ,  $\mathcal{R}[k] \equiv \mathcal{P}(0, I, 1) \subseteq \mathbb{R}^1$ ,  $C[k] \equiv h_N \cdot (1, 0)^\top$ ,  $\mathcal{M} = \mathcal{P}((-0.5, 0)^\top, I, (1, 0.1)^\top)$ ,  $h_N = \theta/N$ ,  $\theta = 2$ ,  $N = 200$ , с двумя разными вариантами значений для множеств  $\mathcal{Q}[k]$  и  $\mathcal{M}[k]$ .

В обоих случаях были найдены несколько трубок  $\mathcal{P}^j[.]$ , удовлетворяющих (5.5), с использованием замечаний 5 и 6(b) и соответствующих нескольким  $\mathcal{P}^j[N]$ ,  $j = 1, \dots, N^+$  (матрицы  $\mathcal{P}^j[N]$  выбраны так же, как в разд. IV в [17, ссылка [18]] при построении трубок  $\mathcal{P}^{+i}[.]$  для

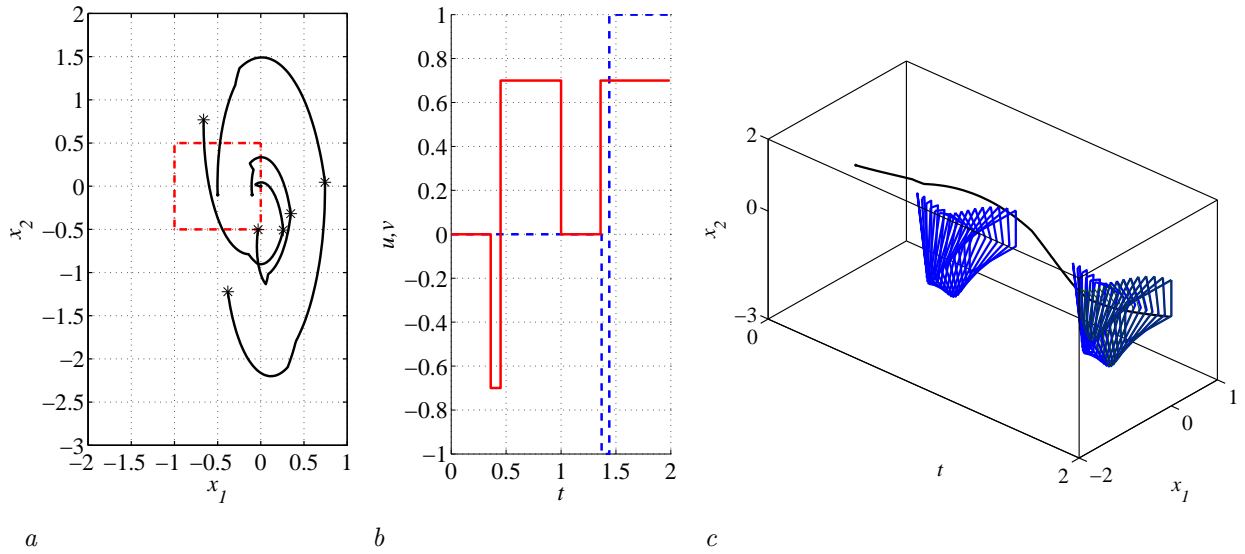


Рис. 2. Результаты моделирования в примере 2:  $a$  — множество  $\mathcal{M}$  и траектории  $x^i[\cdot]$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $b$  — реализации управлений  $v^1$  и  $u$  для  $x^{0,3}$  (сплошная и штриховая линии соответственно);  $c$  — траектория  $x^3[\cdot]$  и использованные для построения управлений трубки  $\mathcal{P}^{j*}[\cdot]$  и  $\mathcal{P}^{-,\gamma*}[\cdot]$ .

решения полиэдральной задачи терминального уклонения,  $N^+ = 4$ ); на основе рекомендаций, данных в конце предыдущего раздела, строились и применялись управления  $v^1[\cdot, \cdot]$ .

При моделировании в качестве управлений  $u$  можно задавать любые допустимые реализации. Мы строили  $u[\cdot, \cdot]$  на основе решения полиэдральной задачи терминального сближения, для чего аналогично разд. IV в [17, ссылка [18]] находилось несколько ( $N^- = 4$ ) полиэдральных трубок  $\mathcal{P}^{-,\gamma}[\cdot]$ ,  $\gamma = 1, \dots, N^-$ , и с использованием “наиболее подходящей” из них конструировалось управление  $u$  (хотя такие управления, вообще говоря, не обязательно “наихудшие” с точки зрения  $v$  в задаче усиленного уклонения; построение таких “наихудших”  $u$  выходит за рамки данной работы). При этом для каждого  $\gamma$  находим номер  $k^\gamma$ : либо  $k^\gamma = 1$ , если  $\mathcal{P}^{-,\gamma}[0]$  оказывается невырожденным параллелограммом, либо такой  $k^\gamma \in \{2, \dots, N\}$ , что в процессе вычислений все сечения  $\mathcal{P}^{-,\gamma}[k]$ ,  $k = N, N-1, \dots, k^\gamma-1$ , получаются невырожденными параллелограммами, а  $\mathcal{P}^{-,\gamma}[k^\gamma-2]$  вырождено или пусто. Определяем  $k^- = \min_{1 \leq \gamma \leq N^-} k^\gamma$ . При  $k^- > 1$  полагаем  $u[k] = r[k]$ ,  $k = 1, \dots, k^- - 1$ . Для построения  $u[k, \cdot]$  при  $k \geq k^-$  используем трубку  $\mathcal{P}^{-,\gamma*}[\cdot]$  с  $\gamma_* \in \text{Argmin} \{ \|\bar{P}^{-,\gamma}[k^- - 1]^{-1}(x[k^- - 1] - p^{-,\gamma}[k^- - 1])\|_\infty \mid \gamma \in \{1, \dots, N^-\}, \text{int } \mathcal{P}^{-,\gamma}[k^- - 1] \neq \emptyset \}$ .

Ситуация такова. Пусть дана начальная точка  $x^0$ . Если она окажется вне хотя бы одного из параллелепипедов  $\mathcal{P}^j[0]$ , то ввиду теоремы 2, используя соответствующие стратегии  $v[\cdot, \cdot]$ , гарантированно сможем обеспечить уклонение от  $\mathcal{M}$  во все моменты  $k$ . Если же она попадет в какой-то из параллелограммов  $\mathcal{P}^{-,\gamma}[0]$ , то согласно [13; 14] с помощью соответствующей стратегии  $u[\cdot, \cdot]$  гарантированно может быть переведена в  $\mathcal{M}$  в конечный момент. В других случаях никакой гарантии нет.

**Пример 1.** Для случая  $\mathcal{Q}[k] \equiv \mathcal{P}(0, I, 0.2) \subseteq \mathbb{R}^1$  решалась полиэдральная задача усиленного уклонения от  $\mathcal{M}[k] = \mathcal{M}$  во все моменты  $k = 1, \dots, N$ .

Были взяты 5 начальных точек:  $x^{0,1} = (-0.6, 2)^\top$ ,  $x^{0,2} = (0, 1.5)^\top$ ,  $x^{0,3} = (0.87, -1.5)^\top$ ,  $x^{0,4} = (0.88, -1.5)^\top$ ,  $x^{0,5} = (1, -1.5)^\top$ . Для каждой из них выбраны трубки  $\mathcal{P}^{j*}[\cdot]$  и  $\mathcal{P}^{-,\gamma*}[\cdot]$ , построены соответствующие значения управлений  $v^1$  и  $u$  и найдены соответствующие траектории  $x^i[\cdot]$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Заметим, что ввиду одномерности  $v$  результаты применения стратегий управления  $v^1[\cdot, \cdot]$  и  $v^2[\cdot, \cdot]$  в данном примере совпадают.

На рис. 1,  $a$  показаны сечения  $\mathcal{P}^j[0]$  и  $\mathcal{P}^{-,\gamma}[0]$ , множество  $\mathcal{M}$ , а также 5 получившихся траекторий  $x^i[\cdot]$ . Начальная точка  $x^{0,5}$  лежит вне одного из начальных сечений  $\mathcal{P}^j[0]$ , и траектория  $x^5[\cdot]$  уклонилась от  $\mathcal{M}$  во все моменты, как и было гарантировано теоретически. Траектория, вышедшая из  $x^{0,1}$  ( $x^{0,1} \in \mathcal{P}^{-,\gamma*}[0]$  для некоторого  $\gamma_*$ ), оказалась на  $\mathcal{M}$  в конечный момент,

как и было гарантировано. Для  $x^{0,j}$ ,  $j = 2, 3, 4$  гарантии не было. Получилось, что траектория  $x^2[\cdot]$  попала на  $\mathcal{M}$  в конечный момент (и в ряд предыдущих),  $x^3[\cdot]$  — в один промежуточный момент, а траектория  $x^4[\cdot]$  не попала совсем. На рис. 1,*b* показаны значения управлений  $v^1$  и  $u$ , построенных для  $x^{0,5}$ , а на рис. 1,*c* приведены сечения (с шагом 4) соответствующих использованных трубок  $\mathcal{P}^{-\gamma^*}[\cdot]$  и  $\mathcal{P}^{j^*}[\cdot]$  и найденная траектория  $x^5[\cdot]$  в динамике.

**Пример 2.** Здесь взяты большие множества  $\mathcal{Q}[k] \equiv \mathcal{P}(0, I, 0.7) \subseteq \mathbb{R}^1$ , а запрет на попадание на  $\mathcal{M}$  наложен только в два момента:  $k = N$  и  $k = N/2$ .

Начальные сечения всех построенных трубок  $\mathcal{P}^j[0]$  оказались пустыми. Были взяты 3 начальные точки:  $x^{0,1} = (0, 0)^\top$ ,  $x^{0,2} = (-0.5, -0.1)^\top$ ,  $x^{0,3} = (-0.1, -0.1)^\top$ . На рис. 2,*a* показаны все 3 соответствующие траектории. Они не попадают на  $\mathcal{M}$  в оба заданных момента  $N$  и  $N/2$  — эти позиции отмечены звездочками. В частности, имеем  $x^3[N] \approx (-0.0332, -0.5147)^\top$ . Рис. 2,*b* и рис. 2,*c* по смыслу подобны рис. 1,*b* и рис. 1,*c*; здесь более подробно представлена точка  $x^{0,3}$ .

## Заключение

Отметим еще раз, что ранее был разработан полиэдральный синтез управлений для задач терминального сближения и терминального уклонения с использованием параллелотопозначных трубок. Здесь рассмотрена задача усиленного уклонения с промежуточными запрещенными множествами и разработан способ ее решения с помощью параллелепипедозначных трубок, включая случаи с вырождением сечений. Дано несколько вариантов формул для синтеза управлений. При этом сечения трубок и значения управлений находятся по явным формулам.

Предлагаемая полиэдральная техника решения задач уклонения может быть применена для построения опасных возмущений, которые можно использовать, например, для оценки робастности управляемых систем и качества управлений. В частности, она может быть использована, наряду с имеющимися работами [6; 16], для оценки надежности различных систем наведения летательных аппаратов, отработки автопилотов и вспомогательных контроллеров, а также для обучения пилотов на авиасимуляторах (летных тренажерах). При этом применяется последовательная линеаризация уравнений в сильно нелинейной модели с точечной массой, а управления с обратной связью, полученные из линеаризованной динамики, используются в нелинейной динамике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. NY: Springer, 1988. 517 p.
2. **Kurzhanski A.B., Vályi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
3. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85). doi: 10.1007/978-3-319-10277-1
4. **Taras'ev A.M., Tokmantsev T.B., Uspenskii A.A., Ushakov V.N.** On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time // J. Math. Sci. 2006. Vol. 139, no. 5. P. 6954–6975. doi: 10.1007/s10958-006-0400-7
5. **Запх М.А., Пацко В.С.** Стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 193–200.
6. **Botkin N., Martynov K., Turova V., Diepolder J.** Generation of dangerous disturbances for flight systems // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9, no. 3. P. 628–651. doi: 10.1007/s13235-018-0259-5
7. **Esterhuizen W., Wang Q.** Control design with guaranteed transient performance: An approach with polyhedral target tubes // Automatica. 2020. Vol. 119. Art. no. 109097. doi: 10.1016/j.automatica.2020.109097
8. **Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б., Матвиенко В.Т.** Полиэдральная формализация задач терминального управления дискретными динамическими объектами // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. 2020. Т. 4, № 1. С. 224–230.

9. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
10. **Filippova T.F.** HJB-inequalities in estimating reachable sets of a control system under uncertainty // *Ural Math. J.* 2022. Vol. 8, no. 1. P. 34–42. doi: 10.15826/umj.2022.1.004
11. **Gusev M.I.** The limits of applicability of the linearization method in calculating small-time reachable sets // *Ural Math. J.* 2020. Vol. 6, no. 1. P. 71–83. doi: 10.15826/umj.2020.1.006
12. **Kurzhanskiy A.A., Varaiya P.** Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances // *Automatica.* 2011. Vol. 47, no. 7. P. 1414–1426. doi: 10.1016/j.automatica.2011.02.009
13. **Kostousova E.K.** On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. Vol. 292, Suppl. 1. P. S140–S155. doi: 10.1134/S0081543816020127
14. **Kostousova E.K.** On polyhedral control synthesis for dynamical discrete-time systems under uncertainties and state constraints // *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A.* 2018. Vol. 38, no. 12. P. 6149–6162. doi: 10.3934/dcds.2018153
15. **Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J.** Real-time control of aircraft take-off in windshear. Part I: Aircraft model and control schemes // *IEEE Xplore Digital Library.* 2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017), July 3–6, 2017, Valtetta, Malta: Proc. P. 277–284. doi: 10.1109/MED.2017.7984131
16. **Martynov K., Botkin N.D., Turova V.L., Diepolder J.** Quick construction of dangerous disturbances in conflict control problems // *Annals of the International Society of Dynamic Games.* 2020. Vol. 17. P. 3–24. doi: 10.1007/978-3-030-56534-3\_1
17. **Костоусова Е.К.** О полиэдральном методе синтеза управлений в задаче целевого уклонения в линейных многошаговых системах // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2021. Т. 27, № 3. С. 101–114. doi: 110.21538/0134-4889-2021-27-3-101-114
18. **Ушаков В.Н., Гусейнов Х.Г., Латушкин Я.А., Лебедев П.Д.** О совпадении максимальных стабильных мостов в двух игровых задачах о сближении для стационарных управляемых систем // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2009. Т. 15, № 3. С. 219–240.
19. **Schneider R.G.** Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. 490 p.
20. **Хадвигер Г.** Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966. 416 с.
21. **Костоусова Е.К.** О двусторонних полиэдральных оценках множеств достижимости линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // *Вычислительные технологии.* 2003. Т. 8, № 4. С. 55–74.

Поступила 25.01.2023

После доработки 15.02.2023

Принята к публикации 20.02.2023

Костоусова Елена Кирилловна

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: kek@imm.uran.ru

## REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY, Springer, 1988, 517 p.
2. Kurzhanski A.B., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* In: *Systems & Control: Foundations & Applications.* Boston, Birkhäuser, 1997, 321 p.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation.* In: *Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85.* Basel, Birkhäuser, 2014, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1
4. Taras'ev A.M., Tokmantsev T.B., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 139, no. 5, pp. 6954–6975. doi: 10.1007/s10958-006-0400-7

5. Zarkh M.A., Patsko V.S. The second player's strategy in a linear differential game. *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 2, pp. 150–155. doi: 10.1016/0021-8928(87)90056-6
6. Botkin N., Martynov K., Turova V., Diepolder J. Generation of dangerous disturbances for flight systems. *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, no. 3, pp. 628–651. doi: 10.1007/s13235-018-0259-5
7. Esterhuizen W., Wang Q. Control design with guaranteed transient performance: An approach with polyhedral target tubes. *Automatica*, 2020, vol. 119, article no. 109097. doi: 10.1016/j.automatica.2020.109097
8. Filimonov A.B., Filimonov N.B., Matvienko V.T. Polyhedral formalization of terminal control problems for discrete dynamic objects. *Vysokoproizvoditel'nye vychislitel'nye sistemy i tekhnologii* [High performance computing systems and technologies], 2020, vol. 4, no. 1, pp. 224–230 (in Russian).
9. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov* [Estimation of phase state of dynamic systems: the ellipsoid method], Moscow, Nauka Publ., 1988, 319 p. (in Russian).
10. Filippova T.F. HJB-inequalities in estimating reachable sets of a control system under uncertainty. *Ural Math. J.*, 2022, vol. 8, no. 1, pp. 34–42. doi: 10.15826/umj.2022.1.004
11. Gusev M.I. The limits of applicability of the linearization method in calculating small-time reachable sets. *Ural Math. J.*, 2020, vol. 6, no. 1, pp. 71–83. doi: 10.15826/umj.2020.1.006
12. Kurzhanskiy A.A., Varaiya P. Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances. *Automatica*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1414–1426. doi: 10.1016/j.automatica.2011.02.009
13. Kostousova E.K. On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. S140–S155. doi: 10.1134/S0081543816020127
14. Kostousova E.K. On polyhedral control synthesis for dynamical discrete-time systems under uncertainties and state constraints. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A*, 2018, vol. 38, no. 12, pp. 6149–6162. doi: 10.3934/dcds.2018153
15. Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J. Real-time control of aircraft take-off in windshear. Part I: Aircraft model and control schemes. In: *IEEE Xplore Digital Library. 2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017)*: Proc., pp. 277–284. doi: 10.1109/MED.2017.7984131
16. Martynov K., Botkin N.D., Turova V.L., Diepolder J. Quick construction of dangerous disturbances in conflict control problems. *Annals of the International Society of Dynamic Games*, 2020, vol. 17, pp. 3–24. doi: 10.1007/978-3-030-56534-3\_1
17. Kostousova E.K. On the polyhedral method of control synthesis in the problem of target evasion in discrete-time systems. *Trudy Inst. Math. Mekh.*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 101–114 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-101-114
18. Ushakov V.N., Guseinov Kh.G., Latushkin Ya.A., Lebedev P.D. On the coincidence of maximal stable bridges in two approach game problems for stationary control systems. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. S240–S263. doi: 10.1134/S0081543810050172
19. Schneider R.G. *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1993, 490 p. doi: 10.1017/CBO9780511526282
20. Hadwiger H. *Vorlesungen uber Inhalt, Oberflache und Isoperimetrie*. Berlin, Springer-Verlag, 1957, 312 p. Translated to Russian under the title *Lektsii ob ob"eme, ploshchadi poverkhnosti i izoperimetrii*, Moscow, Nauka Publ., 1966, 416 p.
21. Kostousova E.K. Polyhedral estimates for attainability sets of linear multistage systems with integral constraints on the control. *Vychislitel'nye Tekhnologii (Computational Technologies)*, 2003, vol. 8, no. 4, pp. 55–74 (in Russian).

Received January 25, 2023

Revised February 15, 2023

Accepted February 20, 2023

*Elena Kirillovna Kostousova*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: kek@imm.uran.ru .

Cite this article as: E. K. Kostousova. On a control synthesis in an enhanced evasion problem for linear discrete-time systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 111–126 .